Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
15.11.2006

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Sind folgende Funktionen surjektiv? Sind sie injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 3z$ für $z \in D(f) = \mathbb{Z}$

(b) $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit $g(x) = |x - 1|$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 3x$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$

Lösung:

(a) Die Funktion f ist nicht surjektiv, da es keine $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(z) = 3z = 1$.
Behauptung:f ist injektiv.
Beweis: Sei $z_1,\ z_2 \in D(f)$ mit $z_1 \neq z_2$. Dann gilt $f(z_1) = 3z_1 \neq 3z_2 = f(z_2)$, da $3z_1 \neq 3z_2$ aus $z_1 \neq z_2$ folgt. Daher existiert eine Umkehrfunktion. Es gilt $D(f^{-1}) = B(f) = \{z \in \mathbb{Z} : z = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\}$, $f^{-1}(z) = \frac{1}{3}z$.

(b) Die Funktion g ist nicht injektiv, da $g(0) = 1 = g(2)$ und $0, 2 \in D(g)$ gilt. Daher existiert keine Umkehrfunktion. g ist surjektiv, da für $y \in [0, \infty[$ (Wertebereich) $g(y + 1) = y$ und $y + 1 \in D(g)$ gilt.

(c) Die Funktion h ist injektiv (ähnliche Argumentation wie in (a)). Sie ist aber im Gegensatz zu f surjektiv, da für $x \in \mathbb{R}$ (Wertebereich) $h(x/3) = x$ und $x/3 \in \mathbb{R} = D(h)$ gilt. Da h injektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion. Es gilt $D(h^{-1}) = B(h) = \mathbb{R}$, $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$.

Aufgabe G2 ()

Beweisen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Lösung: Es gilt mit der Dreiecksungleichung $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$, also $|x|-|y| \leq |x-y|$. Da analog $|y| - |x| \leq |x - y|$ gezeigt werden kann, gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Aufgabe G3 ()

Bestimmen Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 5|}{4 - |x|} \leq 2\}.$$

Lösung: Es gilt

$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & x \geq -5 \\ -x-5, & x < -5 \end{cases}, \qquad 4-|x| = \begin{cases} 4-x, & x \geq 0 \\ 4+x, & x < 0 \end{cases}.$$

Wir unterscheiden die Fälle

(a) $x < -5$,

(b) $-5 \leq x < -4$,

(c) $-4 < x < 0$,

(d) $0 \leq x < 4$,

(e) $4 \leq x$,

da $4 - |x| \neq 0$ gewährleistet sein muss.

(a) $\frac{-x-5}{4+x} \leq 2$ genau dann, wenn $-x-5 \geq 8+2x$, also genau dann, wenn $x \leq -\frac{13}{3}$. Also gilt $x \in \mathbb{R} : x < -5\} \subset M$.

(b) $\frac{x+5}{4+x} \leq 2$ genau dann, wenn $x+5 \leq 8+2x$, also genau dann, wenn $x \geq -3$.

(c) Analog.

(d) $\frac{x+5}{4-x} \leq 2$ genau dann, wenn $x+5 \geq 8-2x$, also genau dann, wenn $1 \leq x < 4$.

(e) $\frac{x+5}{4-x} \leq 2$ genau dann, wenn $x+5 \geq 8-2x$, also genau dann, wenn $x > 4$.

Zusammenfassend gilt $M = (-\infty, -5) \cup [-3, 0) \cup [1, 4) \cup (4, \infty)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (1 Pkt)

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|.$$

Lösung: Es gilt $|a| = \frac{1}{2}|(a+b)+(a-b)| \leq \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b|$. Analog erhält man $|b| = \frac{1}{2}|(a+b)+(a-b)| \leq \frac{1}{2}|a+b| + \frac{1}{2}|a-b|$. Somit erhält man $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.

Aufgabe H2 (2 Pkt)

Bestimmen Sie alle reelle Zahlen, für welche die folgende Ungleichung gilt.

$$x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2.$$

Lösung: Wir betrachten zuerst die erste Ungleichung $x + 1 \leq 2|x|$.
Fall 1: $x \geq 0$. Somit ist $x + 1 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$.
Fall 2: $x < 0$. Somit ist $x + 1 \leq -2x \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$.
Wir erhalten als Lösungsmenge $L_1 = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$.
Betrachten wir nun die zweite Ungleichung $2|x| \leq x + 2$.
Fall 1: $x \geq 0$. Somit ist $2x \leq x + 2 \Leftrightarrow x \leq 2$.
Fall 2: $x < 0$. Somit ist $-2x \leq x + 2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$.
Wir erhalten als Lösungsmenge $L_2 = [-\frac{2}{3}, 2]$.
Die Lösung beider Ungleichungen ist daher $L = L_1 \cap L_2 = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}] \cup [1, 2]$.

Aufgabe H3 (4 Pkt)

Untersuchen Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\ f_2 &: [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 29, \\ g_1 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^2 \quad \text{und} \\ g_2 &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und geben Sie jeweils das Bild der Funktion an. Geben Sie auch die Umkehrfunktion an, falls diese existiert.

Lösung: Die Funktion f_1 ist *injektiv*, da für zwei beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ aus $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ nach Definition $3x_1 + 29 = 3x_2 + 29$ bzw. mit einfachen Umformungen $x_1 = x_2$ folgt. Sie ist auch *surjektiv*, da für ein *beliebiges* $y \in \mathbb{R}^3$ die Zahl $\frac{y-29}{3} \in \mathbb{R}^3$ ist und $f_1\left(\frac{y-29}{3}\right) = y$ gilt. Damit ist f_1 *bijektiv* und

$$f_1^{-1} : R \to R : y \mapsto \frac{y - 29}{3}$$

ist die Umkehrfunktion von f_1. Für das Bild von f_1 gilt $f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Die Funktion f_2 ist *injektiv* nach der exakt selben Argumentation wie für f_2. Allerdings ist sie *nicht surjektiv*, da offensichtlich alle Zahlen im Bild von f_2 größer als Null sind und es daher zum Beispiel kein x aus dem Definitionsbereich gibt, sodaß $f_2(x) = -1$. Folglich ist f_2 auch nicht bijektiv und besitzt deshalb keine Umkehrfunktion. Da f_2 streng monoton wachsend (und stetig) ist, gilt $f_2([0, \infty)) = [29, \infty)$.

Die Funktion g_1 ist *nicht injektiv*, da zum Beispiel für $-1, 1 \in \mathbb{Z}$ $g_1(-1) = 1 = g_1(1)$ gilt. Sie ist auch nicht *surjektiv*, da es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt, sodaß $f(x) = -1$, denn offensichtlich sind alle Funktionswerte größer oder gleich Null. Folglich ist sie auch *nicht bijektiv* und besitzt keine Umkehrfunktion. Das Bild von g_1 ist die Menge der (ganzzahligen) Quadratzahlen.

Die Funktion g_1 ist *nicht injektiv* nach derselben Argumentation wie für g_1. Sie ist auch *nicht surjektiv*, da es kein $x \in \mathbb{Z}$ gibt, sodaß $f(x) = 2$, denn $\sqrt{2}$ ist keine natürliche Zahl. Folglich ist sie auch *nicht bijektiv* und besitzt keine Umkehrfunktion. Das Bild von g_2 ist wieder die Menge der (ganzzahligen) Quadratzahlen.