Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008
8.11.2007

4. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

konvergiert.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert. Es gilt

$$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$$

für alle $k \geq 1$. Somit gilt nach dem Majoranten-Kriterium, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

absolut konvergiert. Deshalb konvergiert sie.

Aufgabe G2 ()

Zeigen Sie, daß die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots$$

konvergiert.

Lösung: Um zu zeigen, daß die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots = \sum_{k=0} (-1)^n b_n = \sum_{k=0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konvergiert verwenden wir das Leibniz-Kriterium. Die Reihe ist alternierend. Es gilt $b_n = \frac{1}{2n+1} > 0$ und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Somit sind aller Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums erfüllt und es ist bewiesen, daß die Reihe konvergiert.

Aufgabe G3 ()

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{k} \cdot q^k$ mit $|q| < 1$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Hinweis: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{k!}}{2^k} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{k+1}}.$$

Da $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt{k+1}} = 0$, konvergiert die Reihe absolut.

(b) Wir verwenden das Wurzelkriterium: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = q\sqrt[k]{\sqrt[k]{k}} \leq q\sqrt[k]{k}$. Also ist $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$, d.h. die Reihe konvergiert absolut.

(c) Wir verwenden das Quotientenkriterium: Wir erhalten mit $a_k := \frac{k}{3^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k}\frac{1}{3} = \frac{k+1}{3k}.$$

Für jedes $k \geq 1$ gilt nun aber $\frac{k+1}{3k} \leq \frac{2}{3}$, also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut.

Aufgabe G4 ()

Untersuchen Sie die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $x_k = \left(3k^{-1}, \pi + \frac{17k}{k^2-4k+5}, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}\right)$

(b) $y_k = \left(\sqrt[k]{15}, -12, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, k^{-1}\sin(k)\right)$

Lösung:

(a) Es gilt $\lim_{k\to\infty} 3k^{-1} = 0$, $\lim_{k\to\infty} \pi + \frac{17k}{k^2-4k+5} = \pi$, $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$. D.h. die Grenzwerte existieren in jeder Komponente. Damit existiert auch der Grenzwert, es gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = (0, \pi, \frac{\pi^2}{6})$.

(b) Es gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{15} = 1$, $\lim_{k\to\infty} -12 = -12$, $\lim_{k\to\infty} k^{-1}\sin(k) = 0$. Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ existiert jedoch nicht (harmonische Reihe). Damit ist die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Aufgabe G5 (Fibonacci-Folge)

Wir definieren die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

(a) Zeigen Sie daß

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zeigen sie dies für $n = 0$ und für $n = 1$ einzeln und für $n > 1$ durch vollständige Induktion.

(b) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

konvergiert.

Lösung: (a):

Offensichtlich ist die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n$$

für $n = 0$ und $n = 1$ erfüllt. Der Fall $n > 1$ wird jetzt durch Induktion bewiesen. Es reicht der Induktionsschluß. Nehmen wir an es gelte

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m \leq a_m$$

für $m \geq n$. Somit können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \\
&\leq \frac{1}{2}(1+\frac{2}{3})\left(\frac{3}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\
&= a_n + a_{n-1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Der Induktionsschluß ist vollständig.
(b):
Wegen Teil (a) der Aufgabe gilt

$$\frac{1}{a_n} \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

für $|x| < 1$ sehen wir, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6$$

konvergiert. Sie ist eine Majorante, und die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

ist bewiesen.

Hausübung

Aufgabe H1 (3 Pkt)

Berechnen Sie

(a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ und

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$. (denken Sie an $k\,(k-1)$)

Lösung: (a):

Wir berechnen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

mit Hilfe der geometrischen Reihe. Die Formel der geometrischen Reihe lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

für $|x|<1$. Wir rechnen jetzt:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{2})}=1.$$

(b):

In der Vorlesung haben wir

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=1$$

gezeigt. Somit haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}\\ &= 1\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (3 Pkt)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)^k$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{2^k}$.

Lösung:

(a) Wurzelkriterium: Mit $a_k=k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)^k$ gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)^k}\leq\sqrt[k]{\left(\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{k}\leq\frac{1}{2}$$

für $k\geq 2$. Somit ist die Reihe absolut konvergent.

(b) Quotientenkriterium: Mit $a_k = \frac{k}{2^k}$ erhalten wir

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)2^k}{2^{k+1}k}\right| = \frac{1+\frac{1}{k}}{2} \le \frac{3}{4}$$

für $k \ge 2$. Damit ist die Reihe absolut konvergent.

(c) Quotientenkriterium: Wir erhalten mit $a_k = \frac{3^k}{2^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{3^{k+1}2^k}{2^{k+1}3^k}\right| = \frac{3}{2} > 1.$$

Die Reihe ist also divergent.

Aufgabe H3 (2 Pkt)

Berechnen Sie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \cdots.$$

Hinweis: betrachten Sie $(2k)^2 - 1$ und vergessen Sie nicht: Gleichheit zu zeigen ist einfach!

Lösung: Wir haben die Reihe

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \cdots \\
= \; & \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \cdots \\
= \; & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2-1} \\
= \; & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2-1}
\end{aligned}$$

zu berechnen. Zunächst berechnen wir die Partial-Summe:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2-1} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+1} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2l+1}\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2\cdot 0+1} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2l+1}\right] - \left[(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2l+1}) + \frac{1}{2n+1}\right]\right) \\
= \; & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1}).
\end{aligned}$$

Jetzt rechnen wir weiter

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2-1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+\cdots=\frac{1}{2}.$$