Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008
1.11.2006

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad a_n := 1 + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie, warum die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Bestimmen Sie für $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{30}$ und $\varepsilon_3 = \frac{1}{100}$ jeweils ein $N(\varepsilon_i) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon_i \text{ für } n \geq N(\varepsilon_i), \quad i = \{1,2,3\}.$$

Lösung: Die Folge ist monoton fallend, da $1+\frac{1}{n+\sqrt{n}} > 1 + \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}}$ (vollständige Induktion). Da $n+\sqrt{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist also monoton und beschränkt. Es folgt aus dem Monotoniekriterium, dass sie konvergiert. Da $\lim_{n\to\infty} n+\sqrt{n} = \infty$, folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Man untersucht nun die Ungleichung

$$\left|1+\frac{1}{n+\sqrt{n}} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \varepsilon_i.$$

Man erhält $\frac{1}{\varepsilon_i} < n+\sqrt{n}$. Da $n+\sqrt{n} > n$, ist $N(\varepsilon_i) > \frac{1}{\varepsilon_i}$ eine hinreichende Wahl für $N(\varepsilon_i)$. Dies liefert $N(\varepsilon_1) = 10$, $N(\varepsilon_2) = 30$ und $N(\varepsilon_3) = 100$.

Aufgabe G2 ()

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Benutzen Sie das Monotoniekriterium, indem Sie zeigen, dass die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

Lösung: Zunächst soll gezeigt werden, dass die Folge a_n konvergiert. Offensichtlich sind alle Folgenglieder echt größer als Null, womit die Folge nach unten beschränkt ist.

Weiter soll gezeigt werden, dass die Folge monoton fallend ist, das heißt

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & \leq & a_n \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) & \leq & a_n \\ \Leftrightarrow & a_n + \frac{2}{a_n} & \leq & 2a_n \\ \Leftrightarrow & a_n^2 + 2 & \leq & 2a_n^2 \\ \Leftrightarrow & 2 & \leq & a_n^2 \end{array}$$

Weiter gilt

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1}^2 & \geq & 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)^2 & \geq & 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{a_n^2}{4} + 1 + \frac{1}{a_n^2} & \geq & 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{a_n^2}{4} - 1 + \frac{1}{a_n^2} & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 & \geq & 0. \end{array}$$

Außerdem gilt $a_0^2 = 4 \geq 2$, womit für alle $n \geq 0$ die Ungleichung $a_n^2 \geq 2$ gilt.
Daher ist die Folge monoton fallend und beschränkt und folglich konvergent.
Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$\begin{array}{rrcl} & a & = & \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \\ \Leftrightarrow & 2a & = & a + \frac{2}{a} \\ \Leftrightarrow & a^2 & = & 2 \\ \Leftrightarrow & a & = & \pm\sqrt{2} \end{array}$$

Da aber alle Folgenglieder positiv sind und damit auch der Grenzwert, kann nur $a = \sqrt{2}$ gelten.

Aufgabe G3 ()

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = (-1)^n 42$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,

(c) $c_n = \frac{5n+2}{n}$, $n \geq 1$.

Lösung: (a) Behauptung: Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert nicht.
Annahme: Wir nehmen an, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gegen einen Grenzwert a konvergiert.
Beweis: Nach Annahme existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\varepsilon > |a_n - a| = |(-1)^n 42 - a| \geq ||(-1)^n 42| - |a|| = ||42| - |a||$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Daher ist entweder $a = 42$ oder $a = -42$. Nehmen wir an, es gilt $a = 42$. Sei $\varepsilon = 1$. Nach Annahme existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$1 = \varepsilon > |a_n - a| \tag{1}$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Ist n ungerade, so gilt aber $|a_n - a| = 84$. Dies ist ein Widerspruch zu (1). Damit kann 42 nicht der Grenzwert sein. Analog sehen wir, dass -42 nicht der Grenzwert sein kann.
(b) Behauptung: Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.
Beweis: Für $\varepsilon > 0$ sei $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Somit ist $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.
(c) Erweitern wir c_n mit $\frac{1}{n}$, ergibt sich

$$\frac{5n+2}{n} = 5 + 2\frac{1}{n}.$$

Wir wissen bereits, dass $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist. Mit den Rechenregeln für den Grenzwert erhalten wir somit, dass $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n} = 5 + 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5$$

gilt.

Aufgabe G4 ()

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, (v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Hinweis zu (v): $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Lösung: (i) Es gilt

$$0\le\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\le\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty}0=0$ und gemäß Rechenregeln $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, folgt aus dem Einschließungskriterium $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$.

(ii) Es gilt $0\le\frac{4^n}{n!}\le\frac{43}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Aus dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$.

(iii) Es gilt

$$0\le\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}\le\frac{n^2+n+2}{4n^3}=\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n^3}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+2}{4n^3+1}=0$.

(iv) Es gilt gemäß Vorlesung

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Es folgt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$.

(v) Mit dem Hinweis ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen erhält man $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_1=1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1}=\frac{1}{a_1+\ldots+a_n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, und geben Sie ihren Grenzwert an.

Hinweis: Betrachten Sie die Quotienten a_{n+2}/a_{n+1}, um das Monotoniekriterium anwenden zu können.

Lösung: Es ist

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}<1$$

Daraus folgt durch eine einfache vollständige Induktion, dass die Folge (a_n) positiv, monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt ist. Also ist die Folge konvergent.
Annahme: $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Dann gelten wegen

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq a$$

die Ungleichungen

$$a \leq a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \leq \frac{1}{na},$$

also

$$a^2 \leq \frac{1}{n}$$

für alle n. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $a > 0$.

Aufgabe H2 ()

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{1}{3^n - n}$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = n^2$, $n \geq 0$,

(c) $c_n = \frac{(n+2)^2}{n^3-n+1}$, $n \geq 0$.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst mittels vollständiger Induktion $3^n \geq 2n$. Zeigen Sie dann, dass a_n eine Nullfolge ist.

Lösung: (a) Wir zeigen zuerst den Hinweis:
Behauptung: $3^n \geq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis: Mit Hilfe der vollständigen Induktion erhalten wir die Behauptung:
IA: Betrachte $n = 0$. Dann erhalten wir $3^0 = 1 \geq 0$.
IS: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $3^n \geq 2n$ (IV).
Behauptung

$$3^{n+1} \geq 2(n+1)$$

Beweis

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{(IV)}}{\geq} 6n \geq 2(n+1).$$

Behauptung: $(c_n)_{n\geq 0}$ ist eine Nullfolge.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann erhalten wir mit dem Hinweis

$$\left| \frac{1}{3^n - n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$.
(b) Es gilt $b_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Folge unbeschränkt und somit divergent.
(c) Behauptung: Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ konvergiert gegen 0.
Beweis: Erweitern wir $\frac{(n+2)^2}{n^3-n+1}$ mit $\frac{1}{n^3}$, ergibt sich

$$\frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}^3}.$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir, dass die Folge konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} + 4\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = 0.$$

Aufgabe H3 ()

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)$, (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4}$.

Lösung: (i) Es gilt

$$\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

(ii) Es gilt $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$. Da gemäß Vorlesung $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Einschließungskriterium $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) &= \frac{(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+2n+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3} + \frac{1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}\end{aligned}$$

Es folgt mit der Monotonie der Wurzelfunktion, dem Einschließungskriterium und den Rechenregeln für konvergente Folgen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) = \frac{1}{3}$.

(iv) Es gilt

$$0 \leq \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4} \leq \frac{2-n+4n^2}{2n^4} = \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2n^3} + \frac{2}{n^2}.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Einschließungskriterium folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4} = 0$.