Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/2007
23./26.10.2006

1. Übungsblatt zur Mathematik I für Chemie und LaB

Gruppenübung

Aufgabe G1

Zeigen Sie folgende Aussage durch direkten Beweis:

Sind die natürlichen Zahlen m und n ungerade, so ist das Produkt $m \cdot n$ ungerade.

Lösung: Da m und n ungerade Zahlen sind, existieren Darstellungen $m = 2k + 1$ und $n = 2l + 1$, wobei k und l natürliche Zahlen oder 0 sind. Es folgt

$$m \cdot n = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Da $2kl + k + l$ nach Voraussetzung eine natürliche Zahl oder 0 ist, folgt, dass $m \cdot n$ ungerade ist.

Aufgabe G2

Zeigen Sie folgende Aussage durch indirekten Beweis:

Ist n^4 für $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist auch n ungerade.

Lösung: Voraussetzung: n^4 ist ungerade.
Annahme: n ist gerade.
Dann gilt $n = 2k$ für eine natürliche Zahl k. Es folgt

$$n^4 = (2k)^4 = 16k^4 = 2(8k^4).$$

Das heißt, n^4 ist gerade, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Aufgabe G3

Es sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(a) direkt,

(b) durch vollständige Induktion.

Lösung:

(a) Für $q \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) = 1 - q^{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - q + q - q^2 + \cdots + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

(b) **IA:** Betrachte $n = 0$. Es gilt $\sum_{k=0}^{0} = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ (beachte $q \neq 1$). Die Aussage ist also wahr für $n = 0$.
IS: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (IV).
Behauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Zeigen Sie durch indirekten Beweis:

Gilt $abc \leq 0$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$, so gilt $a \leq 0$ oder $b \leq 0$ oder $c \leq 0$.

Aufgabe H2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe H3

Für zwei natürliche Zahlen a und b sagen wir „a teilt b", wenn $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

8 teilt $(9^n - 1)$ für alle natürlichen Zahlen n.