



11. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Uneigentliches Integral)

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

auf Konvergenz und berechnen Sie seinen (uneigentlichen) Wert.

Aufgabe G2 (Uneigentliches Integral)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos t dt = \frac{1}{2}$$

gilt.

Aufgabe G3 (Reihenberechnung)

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{3^{\nu} + 3}, \quad 0 < x < 1,$$

indem Sie die Summanden in geeigneter Weise als Integral interpretieren und anschliessend formal Integration und Summation vertauschen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Uneigentliches Integral, 4P)

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt$$

auf Konvergenz und berechnen Sie seinen (uneigentlichen) Wert.

Aufgabe H2 (Uneigentliches Integral, 4P)

Ermitteln Sie den Bereich des Parameters α , für welchen das uneigentliche Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt,$$

konvergiert.

Aufgabe H3 (Uneigentliches Integral, 6P)

Gegeben sei die Funktion $f : [1, \infty] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Durch die Rotation von f um die x-Achse erhält man einen Trichter, dessen Volumen V und Oberfläche O durch

$$V = \pi \int_1^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad O = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx,$$

gegeben ist. Damit das Ganze ein wenig hübscher aussieht, wird eine studentische Hilfskraft beauftragt, den Trichter von innen anzustreichen. Nach einer Woche harter Arbeit stellt die Hilfskraft nach erstmaligem Nachdenken fest, dass Sie Ihre Arbeit wohl niemals vollenden wird, da die Oberfläche des Trichters unendlich ist. Von Ihrem Tutor erhält sie den Rat: "Fülle den Trichter doch einfach bis zum Rand mit Farbe und schütte ihn anschliessend um. Dann sieht er wie neu aus." Ist dieser Rat praktikabel?