Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
13.12.2007

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Regeln von de L'Hospital)
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von de L'Hospital.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Aufgabe G2 (Extremstellen)
Untersuchen Sie das Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx,\ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $D(f) = \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen .

Aufgabe G3 (Mittelwertsatz)

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$ für alle $x \geq 1$.

Aufgabe G4 (Taylor-Polynom)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätzen Sie den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Extrema, 4 P)
Die Funktion f sei auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = (x^3 - 4x^2 - 8x - 8)\,e^x$$

definiert. Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von f, sowie deren Typ. Bestimmen Sie ausserdem die globalen Extrema von f auf $[0, 2]$.

Aufgabe H2 (Trigonometrische Funktionen, 2P)

Zeigen Sie nur durch differenzieren und ausnutzen, dass $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ ist, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Aufgabe H3 (de l'Hospital, 4P)

Bestimme folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+x)}$ für $a \neq b$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{a^x-b^x}{x}$ für $a, b > 0$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(d) $\lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$

Aufgabe H4 (Taylor, 4P)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x\,e^x$ in dem Punkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Wie muss der Grad der Entwicklung gewählt werden, damit der Fehler $\leq 10^{-1}$ für $x \in [0, 1]$.