Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
22.11.2007

6. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x}{|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen rechts-/linksseitigen Grenzwert? Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert? Berechnen Sie die Werte gegebenenfalls!

(b) Ist f an der Stelle $x_0 = 0$ rechts-/linksseitig stetig? Ist f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe G2 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-\infty, 0), \\ x + 2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) f hat den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) f hat den Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

(c) f hat den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 2$.

(d) f ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

(e) f ist rechtsseitig stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

(f) f ist stetig.

Aufgabe G3 ()

Die rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ und $f(x) = \frac{x^2-4}{3x^4(x-2)}$.

(a) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$?

(b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, für die dieser Grenzwert existiert.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, 3]$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in]1,2[, \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2,3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a und b so, dass f auf $D(f)$ stetig ist.

Aufgabe H2 ()

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f_i(x)$, $\lim_{x \nearrow x_0} f_i(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f_i(x)$, soweit diese existieren.

(a) $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ für $x \in D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{|x|} - 3}{x - 9}$ für $x \in D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{9\}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{x - 3}{|x - 3|}$ für $x \in D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x}$ für $x \in D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x \neq 0\}$