Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
8.11.2007

4. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

konvergiert.

Aufgabe G2 ()

Zeigen Sie, daß die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots$$

konvergiert.

Aufgabe G3 ()

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{k} \cdot q^k \quad \text{mit } |q| < 1$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Hinweis: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Aufgabe G4 ()

Untersuchen Sie die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $x_k = \left(3k^{-1}, \pi + \frac{17k}{k^2-4k+5}, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}\right)$

(b) $y_k = \left(\sqrt[k]{15}, -12, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, k^{-1}\sin(k)\right)$

Aufgabe G5 (Fibonacci-Folge)

Wir definieren die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

(a) Zeigen Sie daß

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zeigen sie dies für $n = 0$ und für $n = 1$ einzeln und für $n > 1$ durch vollständige Induktion.

(b) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H1 (3 Pkt)

Berechnen Sie

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ und

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$. (denken Sie an $k\,(k-1)$)

Aufgabe H2 (3 Pkt)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)^k$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k}$.

Aufgabe H3 (2 Pkt)

Berechnen Sie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \cdots.$$

Hinweis: betrachten Sie $(2k)^2 - 1$ und vergessen Sie nicht: Gleichheit zu zeigen ist einfach!