Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
25.10.2007

2.Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker"

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen z. Geben Sie auch den Betrag an.

$$(i)\ z = (2+i)\cdot\overline{(-1+6i)} \quad (ii)\ z = \frac{3+2i}{1-i} - \frac{5+i}{3+i} \quad (iii)\ z = \frac{1}{i} \quad (iv)\ z = e^{a+ib} \quad (v)\ e^z = i$$

Hinweis: Setzen Sie in Teil v) $z := a + ib$ und nutzen Sie die Darstellung in Polarkoordinaten.

b) Veranschaulichen Sie sich geometrisch, was die Konjungierte einer komplexen Zahl ist und was die Multiplikation einer komplexen Zahl mit i bewirkt.

Aufgabe G2 (Polarkoordinatendarstellung)

Seien $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$ und $z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellungen von z_1 und z_2.

b) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polarkoordinatendarstellungen von $z_3 = z_1 z_2$, $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ und $z_5 = z_2^{12}$.

c) Geben Sie z_3, z_4 und z_5 in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe G3 (Wurzeln, Gleichungen und Gaußsche Zahlenebene)

a) Skizzieren Sie folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene.

(i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$,

(ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$.

b) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen.

(i) $z^6 = 5 + 2i$,

(ii) $4z + \frac{52}{z} = 24$ mit $z \neq 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Rechnen mit komplexen Zahlen) (4 Punkte)

Es seien $z_1 = 3-i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ und $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$ gegeben. Geben Sie Realteil, Imaginärteil, Argument und Polarkoordinatendarstellung dieser komplexen Zahlen an. Tragen Sie sie zudem in die komplexe Zahlenebene ein und bringen Sie

$$(a)\ z_1 - 2z_2 \quad (b)\ \overline{z_3}\,(-z_4) \quad (c)\ z_3^2 + 3z_2$$

in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H2 (Wurzeln, Gleichungen und Gaußsche Zahlenebene) (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$,

(ii) $z^6 + 64i = 0$.

Hinweis: In Aufgabenteil (i) führen Sie zuerst eine quadratische Ergänzung durch. Man erhält eine Darstellung der foglenden Art: $(z+a)^2 = b$

Nun sucht man zu b die beiden Quadratwurzeln $\pm(x+iy)$. Mit $b = (x+iy)^2$ kann man nun x und y und damit die Lösungen der quadratischen Gleichung angeben.

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in die Gaußsche Zahlenebene ein.

(i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : Im(z^2) = 4\}$,

(ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : 3z\overline{z} - 6z - 6\overline{z} + 9 = 0\}$.

Hinweis: Formen Sie die Gleichung aus M_2 in eine Kreisgleichung um. Dazu sollten Sie sich zuerst überlegen, was $z\overline{z}$ und $z - \overline{z}$ ist.

Aufgabe H3 (Winkelbeziehungen) (2 Punkte)

Zeigen Sie das für $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi \sin\varphi - 4\cos\varphi \sin^3\varphi$

b) $\cos(\varphi + \vartheta) = \cos\varphi \cos\vartheta - \sin\varphi \sin\vartheta$

Hinweis: Nutzen Sie für a) die Moivresche Formel (s. hierzu "Arbeitsbuch Mathe für Ingenieure, v. Finkenstein .." Seite 65/66). Für b) betrachten Sie $e^{i\varphi} \cdot e^{i\vartheta} = e^{i(\varphi+\vartheta)}$ und benutzen anschließend die Darstellung in Polarkoordinaten.