Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20./21.12.07

Probeklausur „Lineare Algebra I“

Vorname: ....

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Studiengang: ....

Fachsemester: ....

Bitte beachten: Die Angabe der Lösung allein reicht nicht. Der Lösungsweg wird bepunktet. Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner, Laptops, Handys etc.) sind nicht zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	Note
Punktzahl	8	4	4	8	14	10	10	4	6	68	
erreichte Punktzahl											

1. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Kreuzen Sie an, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um lineare Teilräume handelt:

- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 = 1 \}$.
- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \}$.
- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2 \}$.
- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

- ☐ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y$.
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (-y, x)$.
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{1-x}{y-1}$.

(c) Kreuzen Sie an, bei welcher der folgenden Strukturen es sich um eine Gruppe handelt:

☐ $\mathbb{Z}$ mit der Addition.

☐ $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation.

☐ $\mathbb{N}$ mit der Addition.

☐ $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Matrixmultiplikation.

(d) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Bedingungen äquivalent dazu sind, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x besitzt:

☐ $\dim \ker A = 0$.

☐ $\dim \ker A = n$.

☐ $\mathrm{Rang}(A) = n$.

☐ $b \in \mathrm{im}\, A$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Sei U der lineare Teilraum, welcher durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$

für $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ definiert ist. Weiter sei V der lineare Teilraum, welcher von den Vektoren $(1, 3, 0, 0)^T$ und $(3, 1, 0, 0)^T$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U \cap V$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}_5$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sind diese Matrizen invertierbar? Bestimme ggf. das Inverse.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Sei V ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \to V$ heißt Projektion, falls $P \circ P = P$ gilt. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung P die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) P ist eine Projektion.

(b) $\mathrm{Id}_V - P$ ist eine Projektion.

(c) $\ker P = \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$.

(d) $\ker(\mathrm{Id}_V - P) = \mathrm{im}\, P$.

Hinweis: Zeigen sie zuerst die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen.

5. Aufgabe (14 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von φ_α.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimension des Kerns und des Bildes von φ_α.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \end{aligned}$$

genau eine Lösung, mehrere Lösungen bzw. gar keine Lösung?

6. Aufgabe($\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ der (2×2)-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1 eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bilden.

(c) Ist $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ abelsch?

7. Aufgabe (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Sei $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche orthogonal an der Gerade $g_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$ spiegelt. Weiter sei $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche orthogonal an der Geraden $g_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$ spiegelt.

(a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass die Matrix von φ_1 bezüglich dieser Basis diagonal ist.

(b) Stellen Sie die Matrix von φ_2 bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ auf.

(c) Bestimmen Sie die Matrix von φ_1 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$. Hinweis: Sie können ggf. Gleichung (1) aus Aufgabe 6 benutzen.

(d) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi_2 \circ \varphi_1$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$.

8. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Determinante $\det(A^T A)$ nicht-negativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A^T A)$ strikt positiv ist.

9. Aufgabe (6 Punkte)

Für $n \geq 2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die folgende $(n \times n)$-Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Bestimmme die Determinante von A_α.