Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20./21.12.07

Probeklausur „Lineare Algebra I“

Vorname: .... | Studiengang: ....

Name: .... | Fachsemester: ....

Matrikelnummer: ....

Bitte beachten: Die Angabe der Lösung allein reicht nicht. Der Lösungsweg wird bepunktet. Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner, Laptops, Handys etc.) sind nicht zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$	Note
Punktzahl	8	4	4	8	14	10	10	4	6	68	
erreichte Punktzahl											

1. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Kreuzen Sie an, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um lineare Teilräume handelt:

- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 = 1 \}$.
- ☐ $\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \}$.
- ☒ $\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2 \}$.
- ☒ $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

- ☒ $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y$.
- ☒ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (-y, x)$.
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{1-x}{y-1}$.

(c) Kreuzen Sie an, bei welcher der folgenden Strukturen es sich um eine Gruppe handelt:

☒ $\mathbb{Z}$ mit der Addition.

☐ $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation.

☐ $\mathbb{N}$ mit der Addition.

☐ $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Matrixmultiplikation.

(d) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Bedingungen äquivalent dazu sind, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x besitzt:

☒ $\dim\ker A = 0$.

☐ $\dim\ker A = n$.

☒ $\operatorname{Rang}(A) = n$.

☐ $b \in \operatorname{im} A$.

Lösung: **Punkte:** Für jede korrekte Antwort gibt es **einen halben Punkt**. Die Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird abgerundet.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Sei U der lineare Teilraum, welcher durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

für $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ definiert ist. Weiter sei V der lineare Teilraum, welcher von den Vektoren $(1, 3, 0, 0)^T$ und $(3, 1, 0, 0)^T$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U \cap V$.

Lösung: Die Teilräume U und V haben die Form

$$\begin{aligned} U &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \right\}, \\ V &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1\\3\\0\\0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda+3\mu\\3\lambda+\mu\\0\\0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Der Schnitt $U \cap V$ ist somit gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
U \cap V &= \{\, x \in V \mid x \in U \,\} \\
&= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda+3\mu \\ 3\lambda+\mu \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda+3\mu) + (3\lambda+\mu) = 0 = (\lambda+3\mu) + (3\lambda+\mu) \right\} \\
&\hfill \text{(2 Punkte)} \\
&= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda+3\mu \\ 3\lambda+\mu \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad 4\lambda + 4\mu = 0 \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \lambda+3\mu \\ 3\lambda+\mu \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \mu = -\lambda \right\} \\
&\hfill \text{(1 Punkt)} \\
&= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -2\lambda \\ 2\lambda \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} .
\end{aligned}
$$

Der Vektorraum $U \cap V$ ist somit ein eindimensionaler Teilraum. Jeder nicht-triviale Vektor in $U \cap V$, z.B. $(1, -1, 0, 0)^T$, bildet somit eine Basis von $U \cap V$. (1 Punkt)
Punkte: 2 Punkte werden dafür vergeben, dass der Schnitt von U und V korrekt als Lösungsmenge eines Gleichungssystems beschrieben wurde. **2 weitere Punkte** werden dafür vergeben, dass aus diesem Gleichungssystem korrekt eine Basis berechnet wurde. Davon wird ein Punkt für das korrekte Lösen des Gleichungssystems und ein Punkt für das Ermitteln einer Basis aus der Lösung vergeben.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachte die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}_5$:

$$
A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Sind diese Matrizen invertierbar? Bestimme ggf. das Inverse.

Lösung: Wir bestimmen zuerst die Determinante beider Matrizen durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$
\begin{aligned}
\det A &= 2(0-1) - 2(-2-1) + 1(2-0) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 2 = 3 - 4 + 2 = 1 , \\
\det B &= 2(0-1) - 2(-2-3) + 1(2-0) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 2 = 3 + 2 = 0 .
\end{aligned}
$$

Die Matrix A ist somit invertierbar, die Matrix B hingegen nicht. Wir bestimmen das Inverse von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit Zeilenumformungen:

$$
\begin{array}{rrr|rrrr}
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \text{letzte Zeile mit 2 multiplizieren} \\
\hline
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & \text{erste Zeile von allen anderen abziehen} \\
\hline
2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \cdot 3 = 1 \\
0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & \text{zweite Zeile mit 2, erste und dritte mit 3 multiplizieren} \\
\hline
1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \text{3-fache der letzte Zeile von erster Zeile abziehen} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & \text{zweite Zeile von erster Zeile abziehen} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Das Inverse von A ist also durch $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

Punkte: 1 Punkt wird daür vergeben, dass in $\mathbb{Z}_5$ korrekt gerechnet wurde. Bei Rechenfehlern (auch bei der Berechnung der Inversen) wird dieser Punkte nicht gegeben. **1 Punkt** wird für das korrekte Bestimmen der Invertierbarkeit von A und B vergeben. Dies kann auch durch direkt durch den Gauß-Algorithmus (auch für A) geschehen. **2 Punkte** werden für das Berechnen des Inversen vergeben. Diese Punkte werden auch dann vergeben, wenn eine Matrix B mit $AB = E_3$ gefunden wurde (und dies nachgewiesen wurde).

4. Aufgabe (8 Punkte)

Sei V ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \to V$ heißt Projektion, falls $P \circ P = P$ gilt. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung P die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) P ist eine Projektion.

(b) $\mathrm{Id}_V - P$ ist eine Projektion.

(c) $\ker P = \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$.

(d) $\ker(\mathrm{Id}_V - P) = \mathrm{im}\, P$.

Hinweis: Zeigen sie zuerst die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen.

Lösung:

- $(a) \Rightarrow (b)$
  Sei P eine Projektion. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_V - P)\circ(\mathrm{Id}_V - P) &= \mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V \circ P - P \circ \mathrm{Id}_V + P \circ P \\ &= \mathrm{Id}_V - P - P + P = \mathrm{Id}_V - P\ .\end{aligned}$$

  Damit ist auch $\mathrm{Id}_V - P$ eine Projektion.

- $(b) \Rightarrow (a)$
  Sei $\mathrm{Id}_V - P$ eine Projektion. Dann ist nach der ersten Implikation auch die Abbildung $\mathrm{Id}_V - (\mathrm{Id}_V - P) = \mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V + P = P$ eine Projektion.

- $(a) \Rightarrow (c)$
  Sei P eine Projektion. Wir zeigen zuerst $\ker P \subseteq \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$. Sei hierzu $v \in \ker P$. Dann gilt $P(v) = 0$ und somit

$$(\mathrm{Id}_V - P)(v) = v - P(v) = v - 0 = v\ ,$$

  d.h. v liegt im Bild von $\mathrm{Id}_V - P$.
  Als nächstes Zeige wir $\mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P) \subseteq \ker P$. Sei hierzu $v \in \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$. Dann gibt es ein $w \in V$ mit $v = w - P(w)$. Somit gilt

$$P(v) = P\big(w - P(w)\big) = P(w) - (P \circ P)(w) = P(w) - P(w) = 0\ ,$$

  d.h. $v \in \ker P$. Zusammen ergibt sich also $\ker P = \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$.

- $(c) \Rightarrow (a)$
  Es gelte $\ker P = \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P)$. Sei $v \in V$. Dann gilt

$$P(v) - (P \circ P)(v) = P(\underbrace{v - P(v)}_{\in \mathrm{im}(\mathrm{Id}_V - P) = \ker P}) = 0\ .$$

  Es gilt also für $P(v) = (P \circ P)(v)$ für alle $v \in V$, d.h. $P = P \circ P$.

- $(a) \Leftrightarrow (d)$
  Aus der bereits gezeigten Äquivalenz von (a), (b) und (c) folgt dann

$$\begin{aligned}P \text{ Projektion} \quad &\overset{(a)\Leftrightarrow(b)}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{Id}_V - P \text{ Projektion} \\ &\overset{(a)\Leftrightarrow(c)}{\Longleftrightarrow} \quad \ker(\mathrm{Id}_V - P) = \mathrm{im}\big(\mathrm{Id}_V - (\mathrm{Id}_V - P)\big) = \mathrm{im}(P)\end{aligned}$$

Punkte: **1 Punkt** wird für das erkennbare Unterteilen des Beweises in einzelne Teilschritte gegeben. Dieser Punkt wird nur dann gegeben, wenn deutlich erkennbar ist, an welcher Stelle, welche Teilaussage / Implikation bewiesen werden soll. Ob dieser Beweis selbst inhaltlich nachvollziebar ist, spielt dabei keine Rolle. **1 Punkt** wird vergeben, wenn alle Beweise in einer nachvollziebaren, logisch korrekten Form gegeben wurden. Hierfür muss in jedem Abschnitt erkennbar sein, welche Voraussetzungen angenommen wurden und wie (durch welche Argumentation bzw. Schlüsse) gefolgert

wurde. Ob die Argumentation (und die getätigten Annahmen) inhaltlich korrekt sind, spielt dabei keine Rolle.
(Abzüge in diesem Bereich führen i.d.R. auch zu weiteren Abzügen bei den folgenden Punkten, da die Beweise nicht nachvollziehbar sind und deshalb nicht als korrekt gewertet werden.)
1 Punkt wird vergeben, wenn erkennbar ist, dass Implikationen gezeigt werden sollten, aus denen zusammengenommen tatächlich die Äquivalenz der Aussagen folgt. Ob die einzelnen Implikationen korrekt gezeigt wurden, spielt dabei keine Rolle. Insgesammt werden **5 Punkte** vergeben, wenn alle Implikationen gezeigt wurden. Hiervon werden für jede nicht korrekt bewiesene Implikation wie folgt Punkte abgezogen: Ist keine Implikation von einer der oberen beiden Aussagen zu einer der unteren beiden Aussagen korrekt bewiesen, so werden 2 Punkte abgezogen. Wurde dabei wenigstens eine der Inklusionen ($\ker P \subseteq \operatorname{im}(\mathrm{Id}_V - P)$ und $\operatorname{im}(\mathrm{Id}_V - P) \subseteq \ker P$) korrekt gezeigt, wird nur 1 Punkt abgezogen. Für jede weitere fehlende, nicht korrekt bewiesene Implikation wird jeweils 1 Punkt abgezogen.

5. Aufgabe (14 Punkte)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} \alpha x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von φ_α.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dimension des Kerns und des Bildes von φ_α.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \end{aligned}$$

genau eine Lösung, mehrere Lösungen bzw. gar keine Lösung?

Lösung:

(a) Unter der Standardbasis $\mathcal{K}_3$ ist die Matrix von φ_α durch

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(\varphi_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Indem wir diese Matrix (z.B.) nach der ersten Zeile entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det \varphi_\alpha = \det \mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(\varphi_\alpha) &= \alpha(\alpha^2 - 1) - 1(\alpha - 1) + 1(1 - \alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 2 \\ &= (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) \end{aligned}$$

(b) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ gilt $\det \varphi_\alpha \neq 0$, d.h. φ_α ist invertierbar. Somit gilt für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$$\dim(\operatorname{im} \varphi_\alpha) = n \qquad \dim(\ker \varphi_\alpha) = 0$$

Für $\alpha = 1$ hat die Matrix von φ_α die Gestalt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Bild ist deshalb der von $(1,1,1)^T$ aufgespannte, lineare Teilraum $\{\, \lambda(1,1,1)^T \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}$. Insbesondere ist das Bild von φ_1 eindimensional, d.h. $\dim(\operatorname{im} \varphi_1) = 1$. Mit der Rangformel folgt dann

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{im} \varphi_1) + \dim(\ker \varphi_1) = 1 + \dim(\ker \varphi_1) ,$$

also $\dim(\ker \varphi_1) = 2$.
Für $\alpha = -2$ hat die Matrix von φ_α die Gestalt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(\varphi_{-2}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Weil φ_2 nicht die Nullabbildung ist und nicht invertierbar ist, hat das Bild nicht Dimension 0 und nicht Dimension 3. Das Bild von φ_2 hat also Dimension 1 oder Dimension 2. (Analog hat auch der Kern von φ_2 entweder Dimension 1 oder Dimension 2.) Wir suchen deshalb 2 linear unabhängige Vektoren im Bild von φ_2. Hierfür wählen wir die Vektoren

$$v_1 := \varphi_2(0,1,-1) = (0,-3,3)^T , \qquad v_2 := \varphi_2(1,0,-1) = (-3,0,3)^T$$

und zeigen, dass diese linear unabängig sind. Seien hierzu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2 = \begin{pmatrix} -3\mu \\ -3\lambda \\ 3\lambda - 3\mu \end{pmatrix}$$

und somit $\lambda = \mu = 0$. Wir haben also mit v_1, v_2 zwei linear unabhängige Vektoren im Bild gefunden. Das Bild $\operatorname{im} \varphi_2$ hat folglich Dimension 2 und nach der Rangformel hat der Kern $\ker \varphi_2$ dann Dimension 1.

(c) Weil φ_α für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ invertierbar ist, hat das Gleichungssystem $\varphi_\alpha(x) = (1,1,1)^T$ hat für diese α genau eine Lösung, nämlich $x = \varphi_2^{-1}(1,1,1)$.
Für $\alpha = 1$ ist das Bild von φ_α durch den von $(1,1,1)^T$ erzeugten linearen Teilraum gegeben. Der Vektor $(1,1,1)^T$ liegt also im Bild von φ_1 und damit besitzt

das Gleichungssystem $\varphi_1(x) = (1,1,1)^T$ eine Lösung. Wegen $\ker\varphi_1 \neq \{0\}$ ist die Lösung jedoch nicht eindeutig. (Genauer ist die Lösungmenge der affine Teilraum $(1,0,0)^T + \ker\varphi_1$.)

Für $\alpha = -2$ ist das Bild zweidimensional und die Vektoren $v_1 = (0,-3,3)^T$ und $v_2 = (-3,0,3)^T$ bilden eine Basis. Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in μ und ν, so besitzt dieses System keine Lösung, denn aus den oberen beiden Zeilen würde $\lambda = \mu = -1/3$ folgen, was im Widerspruch zur untersten Zeile steht. Der Vektor $(1,1,1)^T$ lässt sich somit nicht als Linearkombination von v_1, v_2 darstellen und liegt deshalb nicht im Bild von φ_2. Folglich besitzt auch das Gleichungssystem $\varphi_2(x) = (1,1,1)^T$ keine Lösung.

Punkte: 1 Punkt wird darauf vergeben, dass in den Aufgaben tatsächlich explizit die Lösung auf die Frage bzw. der Aufgabe angegeben wurde. Dieser Punkt wird nicht gegeben, wenn als Lösung lediglich Rechnungen, Gleichungssysteme oder Mengen angegeben werden. Ob die angegebene Lösung selbst korrekt ist, spielt dabei keine Rolle. **1 Punkt** wird gegeben, wenn die einzelnen Schritte zur Lösung erkennbar unterteilt und verständlich dokumentiert sind. Ob die einzelnen Schritte selbst nachvollziehbar und korrekt durchgeführt wurde, spielt dabei keine Rolle.

(a) **1 Punkt** wird für das korrekte Aufstellen einer Matrix der Abbildung φ_α gegeben. **1 Punkt** wird für das korrekte Berechnen der Determinante aus der aufgestellten Matrix gegeben.

(b) Es werden jeweils **1 Punkt** auf die korrekte Bestimmung der Dimension des Bildes und des Kerns von φ_α in den Fällen $\alpha \notin \{1,2\}$, $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ gegeben. Insgesammt werden auf diesen Aufgabenteil also 6 Punkte vergeben.

(c) **1 Punkt** wird vergeben, wenn für $\alpha = 2$ korrekt gezeigt wurde, dass $(1,1,1)^T$ nicht im Bild liegt. Wurde für die Fälle $\alpha \notin \{1,2\}$, $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ die Lösbarkeit korrekt begründet, gibt es dafür jeweils **1 Punkt**, insgesammt also 3 Punkte.

6. Aufgabe($\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$) (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ der (2×2)-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1 eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bilden.

(c) Ist $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ abelsch?

Lösung:

(a) Eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann ihre Determinante $\det(A) = ad - bc$ nicht Null ist.
In diesem Fall gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-cb & -ad+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ab-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

d.h. die Inverse von A ist durch $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

(b) Wir zeigen, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ ist: Weil alle Matrizen A mit $\det A = 1 \neq 0$ invertierbar sind, ist $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ eine Teilmenge der invertierbaren Matrizen $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. Die Einheitsmatrix E_2 hat ganzzahlige Einträge und Determinante 1, d.h. $E_2 \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Seien $A, A' \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ mit Einträgen

$$A =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A' =: \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Weil A und A' die Determinante 1 haben, gilt $\det(A \cdot A') = (\det A)(\det A') = 1 \cdot 1 = 1$. Außerdem hat auch das Produkt

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + da' \end{pmatrix}$$

ganzzahlige Einträge, weil alle Zahlen $a, a', b, b', c, c', d, d'$ ganzzahlig sind. Das Produkt $A \cdot A'$ liegt somit wieder in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Das Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

hat auch ganzzahlige Einträge und Determinante $\det(A^{-1}) = da - bc = \det(A) = 1$, liegt also auch in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

(c) Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ liegen in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ und es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ ist somit nicht abelsch.

Punkte:

(a) **Jeweils 1 Punkt** wird vergeben, wenn eine der Implikationen korrekt bewiesen wurde. Wurden (wie in den Lösungshinweisen) direkt die Äquivalenz (z.B. mit Hilfe der Determinante) gezeigt, so gibt es 2 Punkte. Weiter gibt es **1 Punkt**, falls gezeigt wurde, dass die Inverse von A die entsprechende Form besitzt.

(b) Wenn gezeigt werden sollte, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ oder $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ ist, gibt es **1 Punkt** auf den Nachweis, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ tatsächlich eine Teilmenge der entsprechenden Gruppe ist. Für den Nachweis der Untergruppeneigenschaften gibt es weitere **4 Punkte**. Von diesen Punkten werden wie folgt Punkte abgezogen: 1 Punkt wird abgezogen, wenn nicht korrekt gezeigt wurde, dass ein Produkt $A \cdot A'$ von Matrizen aus $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ wieder ganzzahlige Einträge besitzt. Ebenso wird ein Punkt abgezogen, wenn dies für die Inverse A^{-1} einer Matrix aus $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ nicht korrekt bewiesen wurde. Weiter wird jeweils 1 Punkt abgezogen, wenn nicht gezeigt wurde, dass auch das Produkt $A \cdot A'$ bzw. das Inverse A^{-1} wieder Determinante 1 besitzt. Außerdem wird 1 weitere Punkt abgezogen wenn nicht ausgeschlossen wurde, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ leer ist. Dieser Punkt wird nicht abgezogen, wenn in einem anderen Aufgabenteil eine Matrix aus $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ explizit angegeben wurde.

(c) **1 Punkt** wird auf die Angabe der Beispielmatrizen gegeben und **1 weiterer Punkt** auf den Nachweis, dass durch diese Beispiele $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ nicht kommutativ ist. Dies kann z.B. durch das Ausrechnen der entsprechenden Produkte geschehen.

7. Aufgabe (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Sei $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche orthogonal an der Gerade $g_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$ spiegelt. Weiter sei $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, welche orthogonal an der Geraden $g_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$ spiegelt.

(a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass die Matrix von φ_1 bezüglich dieser Basis diagonal ist.

(b) Stellen Sie die Matrix von φ_2 bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ auf.

(c) Bestimmen Sie die Matrix von φ_1 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$. Hinweis: Sie können ggf. Gleichung (1) aus Aufgabe 6 benutzen.

(d) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi_2 \circ \varphi_1$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$.

Lösung:

(a) Als Basisvektoren wählen wir einen Vektor auf der Geraden g_1, z.B. $v_1 := (2,1)^T$, und einen Vektor, der orthogonal auf g_1 steht, z.b. den Normalenvektor $v_2 := (1,-2)^T$. Für diese Vektoren gilt dann $\varphi_1(v_1) = v_1$ und $\varphi_1(v_2) = -v_2$. Die Matrix von φ_1 bezüglich dieser Basis $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ hat deshalb die Gestalt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Der Vektor $v_2 = (1,-2)^T$ liegt auf der Geraden g_2, und $v_1 = (2,1)^T$ ist ein Normalenvektor von g_1. Somit gilt $\varphi_2(v_1) = -v_1$ und $\varphi_2(v_2) = v_2$. Die Matrix von φ_2 hat deshalb die Gestalt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(c) Die Basistransformationsmatrix von $\mathcal{B}$ in die Standardbasis $\mathcal{K}_2$ hat die Gestalt

$$S := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Nach Gleichung (1) ist das Inverse deshalb von der Form

$$S^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix von φ_1 bezüglich der Standardbasis ist deshalb gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\varphi_1) &= S\,\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)\,S^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

(d) Aus den vorherigen Aufgabenteilen ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_2 \circ \varphi_1) &= \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_2) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -E_2 .\end{aligned}$$

Somit ist die Matrix von $\varphi_2 \circ \varphi_1$ bezüglich der Standardbasis gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\varphi_2 \circ \varphi_1) &= S\,\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_2 \circ \varphi_1)\,S^{-1} = S(-E_2)S^{-1} = -SE_2S^{-1} = -SS^{-1} \\ &= -E_2 .\end{aligned}$$

Punkte:

(a) **1 Punkt** wird gegeben, wenn Basisvektoren angegeben wurden, bezüglich welchen die Matrix diagonal ist. **1 weiterer Punkt** wird vergeben, wenn korrekt gezeigt wurde, dass die Matrix Diagonalgestalt besitzt. Dies kann z.B. durch Angabe der Matrix von φ_1 bezüglich der Basis geschehen.

(b) **2 Punkt** werden für das Aufstellen der Matrix vergeben. Davon wird 1 Punkt für die korrekte Ergebnis und 1 Punkt für eine vollständige, korrekte Begründung gegeben.

(c) Insgesammt **4 Punkte** werden für die korrekte Berechnung der Matrix vergeben. Davon wird jeweils ein Punkt abgezogen, wenn die Transformationsmatrix (S) nicht korrekt angegeben wurde, wenn deren Inverse (S^{-1}) nicht korrekt bestimmt wurde, wenn die Transformationsformel nicht korrekt angewendet wurde oder wenn ein Matrixprodukt (auch in den anderen Aufgabenteilen) nicht korrekt berechnet wurde.

(d) Hier wird **1 Punkt** darauf vergeben, dass der Zusammenhang zwischen der Verknüpfung $\varphi_2 \circ \varphi_1$ und der Matrixmultiplikation erkannt wurde. Dies ist auch dann der Fall, wenn erkennbar ist, dass die Matrix von $\varphi_2 \circ \varphi_1$ durch ein Produkt von Matrizen zu φ_2 und φ_1 berechnet werden sollte. Ob die Berechnung selbst korrekt ist, spielt dabei keine Rolle. **1 weitere Punkt** wird gegeben, wenn die Matrix korrekt berehnet wurde. Tritt dabei lediglich ein Rechenfehler beim Berechnen eines Matrixproduktes auf, kann dieser Punkt trotzdem gegeben werden. Allerdings wird dafür im Aufgabenteil (c) der entsprechende Punkt abgezogen.

8. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Determinante $\det(A^T A)$ nichtnegativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A^T A)$ strikt positiv ist.

Lösung:

(a) Sei A invertierbar. Dann gilt $\det A \neq 0$ und somit auch

$$\det(A^T \cdot A) = (\det A^T)(\det A) = (\det A)(\det A) = (\det A)^2 \neq 0$$

(b) Ist A invertierbar, so ist nach (a) die Determinante $\det(A^T A)$ nicht-negativ. Außerdem ist auch $A^T A$ inverterbar mit

$$(A^T A)\big(A^{-1}(A^{-1})^T\big) = A^T(AA^{-1})(A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E_n^T = E_n \; .$$

Somit ist auch $\det(A^T A) \neq 0$. Insgesammt ist also die Determinatne $\det(A^T A)$ strikt positiv.

Ist die Determinante von $A^T A$ strikt positiv, so ist $A^T A$ invertierbar. Es gibt also eine Matrix B mit

$$E_n = B(A^T A) = (BA^T)A \; ,$$

d.h. A ist invertierbar mit $A^{-1}BA^T$.

Punkte:

(a) Für einen korrekten Beweis wird **1 Punkt** gegeben.

(b) Ist erkennbar, dass beide Implikationen gezeigt werden sollten, wird **1 Punkt** gegeben. Dabei spielt es keine Rolle, ob die einzelnen Implikationen korrekt gezeigt wurden. Weiter gibt es für einen korrekten Beweis der beiden Implikationen jeweils **1 Punkt**.

9. Aufgabe (6 Punkte)

Für $n \geq 2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die folgende $(n \times n)$-Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Bestimmme die Determinante von A_α.

Lösung: Wir ziehen die unterste Zeile der Matrix von allen anderen Zeilen ab und erhalten so die Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & \dots & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha - 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha - 1 & 1-\alpha \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Weil A' aus A durch Addition von Zeilen hervorgeht, haben diese Matrizen die selbe Determinante, d.h. $\det A = \det A'$. Nun addieren wir zur letzten Spalte jede der anderen Spalten und erhalten die Matrix

$$A'' := \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & \alpha + n - 1 \end{pmatrix} .$$

Weil A'' aus A' durch Addition von Spalten ensteht, gilt $\det A'' = \det A' = \det A$. Weil A'' eine untere Dreiecksmatrix ist, ergibt sich die Determinante von A'' als Produkt der Diagonalelemente, d.h.

$$\det A = \det A'' = (\alpha - 1)^{n-1} \cdot (\alpha + n - 1) = (\alpha - 1)^n + n \cdot (\alpha - 1)^{n-1} .$$

Punkte: 3 Punkte werden gegeben, wenn die Berechnung der Determinante korrekt auf die Berechnung einfacherer Determinanten zurückgeführt wurde. Hiervon werden 2 Punkte abgezogen, wenn nicht argumentiert wurde, wie sich die Lösung aus den einfacheren Determinanten zusammensetzt. Weitere **3 Punkte** werden vergeben, wenn die Determinante korrekt bestimmt wurde.