Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 11.12.07

Lineare Algebra I

9. Tutorium mit Lösungshinweisen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ den Vektorraum aller Polynome und mit $\mathcal{P}_n$ den linearen Teilraum aller Polynome vom Grad n oder kleiner. Wir kennen bereits eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bzw. $\mathcal{P}$, nämlich die sog. *Monombasis* $(1, x, \dots, x^n)$ bzw. $(1, x, x^2, \dots)$.

(T 1) Polynomapproximation am Beispiel

Wir suchen ein Polynom p vom Grad 3 oder kleiner mit

$$p(0) = 0 \qquad p(1) = 1 \qquad p(2) = 1\ . \tag{1}$$

Hierzu bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_3$ den Vektorraum der Polynome vom Grad 3 oder kleiner.

(a) erster Ansatz:
Stellen Sie mit der Monombasis ein Gleichungssystem auf, mit dem sich alle Polynome finden lassen, die Gleichung (1) erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden:

$$p_0 = 1\ , \qquad p_1 = x\ , \qquad p_2 = x \cdot (x-1)\ , \qquad p_3 = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)\ .$$

Jedes Polynom lässt sich also eindeutig als Linearkombination von p_0, p_1, p_2, p_3 darstellen.

(c) zweiter Ansatz:
Stellen Sie mit dieser Basis ein Gleichungssystem auf, mit dem sich alle Polynome finden lassen, die Gleichung (1) erfüllen.

(d) Bestimmen Sie alle Polynome, die Gleichung (1) erfüllen.

LÖSUNG:

(a) Ein Polynom $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ erfüllt genau dann Gleichung (1), wenn

$$\left[\begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

gilt. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind genau die Koeffizienten der Polynome, welche (1) erfüllen.

(b) Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_3 p_3 = 0$, d.h.

$$0 = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x(x-1) + \lambda_3 x(x-1)(x-2)\ .$$

Setze man für x konkret $t = 0$ ein, so ergibt sich $0 = \lambda_0$ und man erhält

$$0 = \lambda_1 x + \lambda_2 (x-1) + \lambda_3 x(x-1)(x-2)\ .$$

Setzt man nun für x konkret $t = 1$ ein ergibt sich analog $\lambda_1 = 0$. Geht man analog weiter mit $t = 2$ vor, erhält man $\lambda_2 = 0$ und weiter für $t = 3$ folgt $\lambda_3 = 0$. Damit ist gezeigt, dass die Vektoren $p_0, \dots, p_3$ linear unabängig sind. Weil $\mathcal{P}_3$ die Dimension 4 hat, bilden sie folglich auch eine Basis von $\mathcal{P}_3$.

(c) Ein Polynom $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$ erfüllt genau dann Gleichung (1), wenn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

(d) Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich, dass ein Polynom p genau dann Gleichung (1) erfüllt, wenn es von der Form

$$p = x - \tfrac{1}{2}x(x-1) + \lambda x(x-1)(x-2)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Bei der Polynomapproximation geht es darum ein Polynom zu finden, welches an gegebenen, paarweise verschiedenen (Stütz-)Stellen $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ bestimmte vorgegebene Wert $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ annimmt. Das heißt wir suchen ein Polynom p mit

$$y_0 = p(t_0)\ , \qquad y_1 = p(t_1)\ , \qquad \dots \qquad y_n = p(t_n)\ . \tag{2}$$

Hierzu bezeichnen wir mit $L \subseteq \mathcal{P}$ die Menge aller Polynome, welche diese Gleichung erfüllen. (Wir wissen bis jetzt noch nicht, ob L die leere Menge ist oder nicht.)

(T 2) Die Struktur des Lösungsraumes

Nehmen Sie an, dass $L \neq \emptyset$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Punktauswertung an dieser Stelle

$$\varphi_t : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_t(p) := p(t)$$

eine lineare Abbildung ist.

(b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Phi(p) := \big(p(t_0), p(t_1), \dots, p(t_n)\big)^T$$

und zeige Sie damit, dass L ein affiner Teilraum von $\mathcal{P}$ ist. Wir bezeichen im Folgenden mit $U \subseteq \mathcal{P}$ den zugehörigen linearen Teilraum.

LÖSUNG:

(a) Analog zu Aufgabe A19 (a) der 8. Übung.

(b) Man rechnet leicht direkt nach, dass Φ linear ist. Wir wählen ein Element $\bar{p} \in L$. Diese Polynom erfüllt dann Gleichung (2). Für jedes weitere Polynom $p \in \mathcal{P}$ gilt dann

$$\begin{aligned} p \in L \qquad &\iff \qquad (p - \bar{p})(t_0) = (p - \bar{p})(t_1) = \dots = (p - \bar{p})(t_n) = 0 \\ &\iff \qquad p - \bar{p} \in \ker \Phi\ , \end{aligned}$$

d.h. es gilt $L = \bar{p} + \ker \Phi$. L ist damit ein affiner Teilraum mit zugeörigem linearen Teilraum

$$U = \ker \Phi = \{\, p \in \mathcal{P} \mid p(t_0) = p(t_1) = \dots = p(t_n) = 0 \,\}\ .$$

Die Menge der gesuchten Polynome ist also bis auf eine Verschiebung ein linearer Teilraum. Um alle Polynome konkret zu bestimmen benötigen wir eine Basis dieses Teilraumes. Eine solche Basis heißt oft auch *Fundamentalsystem*.

(T 3) Konstruktion eines Fundamentalsystems

Betrachten Sie noch einmal die Basis aus Aufgabe T1 und orientieren Sie sich daran.

(a) Finden Sie ein Polynom von möglichst kleinem Grad, welches in U liegt.

(b) Geben Sie mit Hilfe dieses Polynoms eine Basis von U, eine Basis von $\mathcal{P}_n$ und eine Basis von $\mathcal{P}$ an. (Sie können darauf verzichten, nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um eine Basis handelt.)

LÖSUNG: (a) Ein solches Polynom ist z.B.

$$p = (x - t_0) \cdot (x - t_1) \cdot \ldots \cdot (x - t_n)$$

(b) Eine Basis von $\mathcal{P}$ ist durch die Polynome

$$\begin{aligned}
p_0 &:= 1 \\
p_1 &:= (x - t_0) \\
p_2 &:= (x - t_0) \cdot (x - t_1) \\
&\vdots \\
p_{n+1} &:= (x - t_0) \cdot \ldots \cdot (x - t_n) \\
p_{n+2} &:= x \cdot (x - t_0) \cdot \ldots \cdot (x - t_n) \\
p_{n+3} &:= x^2 \cdot (x - t_0) \cdot \ldots \cdot (x - t_n) \vdots
\end{aligned}$$

gegeben. Die Polynome p_{n+k} mit $k \geq 1$ bilden dabei eine Basis von U. Die Polynome $p_0, \ldots, p_n$ bilden eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

Es gibt also entweder gar kein Polynom, welches Gleichung (2) erfüllt ($L = \emptyset$) oder es gibt unendlich viele solcher Polynome. Für die Eindeutigkeit sind deshalb weitere Einschränkungen notwendig.

(T 4) Polynomapproximation mit möglichst kleinem Grad

Wir versuchen nun ein Polynom von möglichst kleinem Grad zu finden, welches (2) erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass die eingeschränkte Abbildung $\Phi_n : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi_n(p) := \Phi(p)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, indem Sie die eine zugehörige Matrix bezüglich einer geeigneten Basis aufstellen.

(b) Folgern Sie, dass es genau ein Polynom in $\mathcal{P}_n$ gibt, welches Gleichung (2) erfüllt.

LÖSUNG:

(a) Wir wählen die Basis $\mathcal{B} = (p_0, \ldots, p_n)$ aus Aufgabe T3. Die Matrix von Φ_n hat dann die Form

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_n}(\Phi_n) = \begin{pmatrix} p_0(t_0) & p_1(t_0) & \cdots & p_n(t_0) \\ p_0(t_1) & p_1(t_1) & \cdots & p_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(t_n) & p_1(t_n) & \cdots & p_n(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & p_1(t_1) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & p_1(t_n) & \cdots & p_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

Es ist also eine untere Dreiecksmatrix, bei der auf der Diagonalen nur von Null verschiedene Einträge $p_i(t_i) \neq 0$ stehen. (Die Stützstellen t_i sind paarweise verschieden.) Die Matrix hat also vollen Rang und ist folglich invertierbar. Die Abbildung Φ_n ist damit ein Isomorphismus.

(b) Weil Φ bijektiv ist, gibt es genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ mit $\Phi_n(p) = (y_0, \ldots, y_n)^T$, d.h. mit

$$y_0 = p(t_0)\ , \qquad y_1 = p(t_1)\ , \qquad \ldots \qquad y_n = p(t_n)$$