Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

6. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Matrizen invertieren

Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 22 \\ 23 & 24 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Zu A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 21 & 22 & 1 & 0 \\ 23 & 24 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+(-\frac{23}{21}I)} \left(\begin{array}{cc|cc} 21 & 22 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{21} & -\frac{23}{21} & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{21II} \left(\begin{array}{cc|cc} 21 & 22 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -23 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{I+(11II)} \left(\begin{array}{cc|cc} 21 & 0 & -252 & 231 \\ 0 & -2 & -23 & 21 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -12 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{23}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 11 \\ \frac{23}{2} & -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

zu B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+(-I),III+(-I)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{I+2III,II+(-\frac{1}{2}II)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{I+(-3II)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Also ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(T 2) Darstellungmatrix

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Standardbasis $\mathbb{K}_2$, die Basis $\mathcal{B} := \{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ sowie den Endomorphismus $\phi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$, der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$.

(b) Stellen Sie den Vektor $v = (3,-1)^T$ und sein Bild $\phi(v)$ als Linearkombination der Basisvektoren in $\mathcal{B}$ dar.

LÖSUNG:

(a) item Um bei einem Basiswechsel die neuen Darstellungen von Vektoren und Matrizen berechnen zu können, benötigen wir die entsprechenden Transformationsmatrizen. Dazu drücken wir als Erstes die Vektoren einer der beiden Basen durch die Vektoren der anderen aus. Hierbei können wir uns entscheiden, welche der beiden Basen wir durch die andere ausdrücken. Am leichtesten fällt die Entscheidung, wenn eine der beiden Basen eine kanonische ist, dann lassen sich die Vektoren der anderen Basis nämlich ganz einfach durch die kanonischen Basisvektoren ausdrücken. In unseren Fall erhalten wir so die Transformationsmatrix

$$S = \mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{K}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\right)^{-1} = S^{-1}$ erhalten wir

$$[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{K}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \cdot A \cdot \mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = S^{-1}AS.$$

Für die Inverse zu S erhalten wir (etwa mittels Gauß-Jordan-Elimination)

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(T 3)

Es bezeichne σ die Orthogonalspiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Matrix von σ zuerst bezüglich einer „geeigneten“ Basis und dann bezüglich der kanonischen Basis.

LÖSUNG:

Eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ besteht etwa aus den Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn da diese aufeinander senkrecht stehen und der erste auf der Spiegelungsachse liegt, erhalten wir

$$\sigma(v_1) = v_1 \qquad \text{and} \qquad \sigma(v_2) = -v_2$$

und somit für die Abbildung σ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$v_1 = -2e_1 + e_2 \qquad \text{and} \qquad v_2 = e_1 + 2e_2$$

erhalten wir die Transformationsmatrix

$$S = \mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathbb{K}_2}(\sigma) = \mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathbb{K}_2} = S\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma)S^{-1} \qquad \text{and} \qquad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

somit

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}_2}^{\mathbb{K}_2}(\sigma) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

(T 4)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Parallelprojektion π in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die durch die Gleichung $x - y + z = 0$ bestimmte Ebene. Bestimme die Matrix von π zuerst bezüglich einer „geeigneten“ Basis und dann bezüglich der kanonischen Basis.

LÖSUNG:

Eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ besteht z.B. aus den Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn da die beiden ersten in der Ebene, auf die projiziert wird, liegen und der letzte die Projektionsrichting angibt, erhalten wir

$$\pi(v_1) = v_1, \qquad \pi(v_2) = v_2 \qquad \text{and} \qquad \pi(v_3) = 0$$

und somit für die Abbildung π bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Transformationsmatrix

$$S = \mathcal{M}_{\mathbb{K}_3}^{B}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}_3}^{\mathbb{K}_3}(\pi) = S\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\pi)S^{-1} \qquad \text{und} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

somit

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}_3}^{\mathbb{K}_3}(\pi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(T 5)

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es genau zwei Drehungen mit Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Drehwinkel 120°. Es bezeichne δ diejenige der beiden Drehungen, bei der sämliche Vektoren, wenn man in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sieht, im Uhrzeigersinn gedreht werden. Bestimme die Matrix von δ zuerst bezüglich einer „geeigneten“ Basis und dann bezüglich der kanonischen Basis.

Lösung:

Eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ besteht aus Vektoren v_1, v_2, v_3, die alle aufeindander senkrecht stehen, die Länge 1 haben und von denen einer auf der Rotationsachse liegt. Der Vektor v_3 soll auf der Achse liegen. Wir wählen deshalb $v_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus der Gleichung

$$\langle x, v_3 \rangle = 0$$

bestimmen wir dann mittels Gauß-Jordan-Elimination einen Vektor x, den wir anschließend normieren. In unserem Fall erhalten wir so den Vektor $v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und aus

$$\langle x, v_2 \rangle = \langle x, v_3 \rangle = 0$$

erhalten wir schließlich den normierten Vektor $v_1 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Die Vekoren v_1 und v_2 sind hierbei keinesfalls eindeutig bestimmt. Sie hängen davon ab, wie wir in der Gauß-Jordan-Elimination unsere Nicht-Pivotvariablen wählen.) Blickt man in Richtung von v_3, so geht v_2 aus v_1 durch eine 90°-Drehung im Uhrzeigersinn hervor. (Hierbei ist räumliche Anschauung gefragt, da uns an dieser Stelle andere Hilfsmittel fehlen.) Damit haben wir eine Situation wie im Skript und wegen $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ und $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten wir somit

$$\delta(v_1) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_2, \qquad \delta(v_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \qquad \text{and} \qquad \delta(v_3) = v_3,$$

woraus sich die Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\delta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ergibt. Als Transformationsmatrix nehmen wir

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eine etwas mühsame Rechnung (oder etwas Wissen aus der Linearen Algebra II) liefert

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbb{K}_3}^{\mathbb{K}_3}(\delta) &= S\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{B}(\delta)S^{-1} = \tfrac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(T 6)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, falls möglich, die Inverse Matrix zu A.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Wie geht es einfacher?

LÖSUNG:

(a) Mit elementaren Zeilenumformungen (Gauß-Jordan-Elimination) angewandt auf (A, E) erhält man (E, A^{-1}).

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Also ist

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Anwendung des Gauß-Algorithmus ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} II-2I \\ \rightsquigarrow \\ III+I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{c} III+\frac{1}{4}II \\ \rightsquigarrow \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{7}{4}\,. \end{array}\right)$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir $x_3 = -\frac{7}{8}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$ und $x_1 = \frac{11}{8}$. Dasselbe Ergebnis erhält man viel schneller, wenn man die in (i) berechnete inverse Matrix A^{-1} auf b anwendet: $x = A^{-1}b$.