Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 27.11.07

Lineare Algebra I

7. Tutorium mit Lösungshinweisen

In diesem Tutorium soll ein Beispiel für einen Vektorraum und eine lineare Abbildung studiert werden. Suchen Sie sich hierfür bitte eine der Aufgaben T1 oder Aufgabe T2 zur Bearbeitung aus. Für Studenten mit Analysis-Kenntnissen ist das Beispiel in Aufgabe T1 zu empfehlen. Aufgabe T2 ist als Ersatz für Studenten ohne Kenntnisse in Analysis gedacht.

(T 1) Ein Beispiel mit etwas Analysis

In Analysis wird das Konvergenzverhalten von reellen Folgen und Reihen behandelt. Eine reelle Folge ist dabei eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Wir schreiben hierfür auch $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ die Menge aller reeller Folgen. (In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass Null ein Element von $\mathbb{N}$ ist.)

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$(a+b)_n := a_n + b_n \qquad\qquad (\lambda \cdot a)_n := \lambda\, a_n$$

einen reellen Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind:

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}, \quad \phi(a)_n := (n+1) \cdot a_{n+1}\ , \\ &\psi : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad (a_n)_n \mapsto a_0\ . \end{aligned}$$

(c*) Zeigen Sie, dass die Menge $\ell^\infty \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ aller beschränkter Folgen einen linearen Teilraum bildet.

(d*) Zeige, dass die Menge $c \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ aller konvergenten Folgen ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist und dass die folgende Abbildung linear ist:

$$L : c \to \mathbb{R}, \quad a = (a_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$$

LÖSUNG: (a) Das neutrale Element der Addition ist die konstante Nullfolge $0_n := 0$. Das additive Inverse einer Folge $a = (a_n)_n$ ist die Folge $-a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, (-a)_n := -a_n$. Die Assoziativität und Kommutativität der Addition rechnet man direkt nach, ebenso die anderen Axiome des Vektoraum.

(b) Seien $a = (a_n)_n$ und $b = (b_n)_n$ Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(a+b)_n &= (n+1)\cdot(a_{n+1}+b_{n+1}) = ((n+1)\,a_{n+1}) + ((n+1)\,b_{n+1}) = \phi(a)_n + \phi(b)_n \\ \phi(\lambda\cdot a)_n &= (n+1)\,\lambda\, a_{n+1} = \lambda\,(n+1)\,a_{n+1} = \lambda\phi(a)_n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(\lambda\cdot a) = \lambda \cdot \phi(a)$.

Für ψ verläuft der Beweis analog.

(T 2) Ein Beispiel ohne Analysis

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome in einer Variablen. Für ein solches Polynom $p = \sum_{i=k}^{n} a_0 x^k$ mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Ableitung wie üblich durch $p' := \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$. Für eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $p(t)$ den Wert des Polynoms an der Stelle t, d.h. $p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathbb{R}[x]$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation einen reellen Vektorraum bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind:

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad \tilde{\phi}(p) := p' ,$$
$$\tilde{\psi} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\psi}(p) := p(0) .$$

LÖSUNG: (a) Das neutrale Element der Addition ist das konstante Nullpolynom $p = 0$. Das additive Inverse eines Polynoms $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist das Polynom $-p = \sum_{k=0}^{n}(-a_k)x^k$. Assoziativität und Kommutativität rechnet man direkt nach, ebenso die übrigen Axiome des Vektorraumes.

(b) Für $\tilde{\phi}$ vgl. Aufgabe T7 des 6. Tutoriums.

Seien $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $q = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ Polynome und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir können o.B.d.A. $n = m$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p+q) &= (p+q)(0) = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)0^k = a_0 + b_0 = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k 0^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k 0^k\Big)\\ &= \tilde{\psi}(p) + \tilde{\psi}(q) ,\\ \tilde{\psi}(\lambda \cdot p) &= \sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k)0^k = \lambda a_0 = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k 0^k = \lambda\, \tilde{\psi}(p) .\end{aligned}$$

(T 3) Kerne

(a) Sei $\varphi : V \to W$ eine linearer Abbildung zwischen Vektorräumen. Zeigen Sie:

  (i) Der Kern $\ker\varphi := \{\, v \in V \mid \varphi(v) = 0 \,\}$ ist einen linearen Teilraum von V.

  (ii) Die Abbildung φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker\varphi = \{0\}$ gilt.

(b) Betrachte das Beispiel aus Aufgabe T1 bzw. Aufgabe T2 und die dortige lineare Abbildung ϕ und ψ bzw. $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$. Was ist der Kern von ϕ und ψ bzw. $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$? Schließe daraus auf die Injektivität der Abbildungen.

(c*) Was ist der Kern der Abbildung von L aus Aufgabe T1? Wir bezeichnen diesen linearen Teilraum mit c_0. Zeigen Sie

$$c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

LÖSUNG: (a) (i) Wegen $\varphi(0) = 0$ gilt $0 \in \ker\varphi$. Seien $v_1, v_2 \in \ker\varphi$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $\varphi(v_1) = 0 = \varphi(v_2)$ und damit auch

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 , \qquad \varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1) = \lambda\, 0 = 0 ,$$

d.h. $v_1 + v_2$ und λv_1 liegen wieder in $\ker\varphi$.

(ii) Gilt $\ker\varphi \neq \{\,0\,\}$, so gibt es in $\ker\varphi$ ein Element $v \neq 0$. Dann gilt $v \neq 0$ und $\varphi(v) = 0 = \varphi(0)$ und somit ist φ nicht injektiv.

Sei umgekehr $\ker\varphi = \{\,0\,\}$. Seien weiter $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann gilt $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0$, d.h. der Vektor $v_1 - v_2$ liegt im Kern von φ. Weil dieser Kern nur aus der Null besteht folgt daraus $v_1 - v_2 = 0$, d.h. $v_1 = v_2$.

(b) Für $\tilde{\phi}$ vergleiche Aufgabe T7 des 6. Tutoriums.

Eine Folge $a = (a_n)_n$ liegt genau dann im Kern von ϕ, wenn $0 = \phi(a)_n = (n+1)a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_n = 0$ für alle $n > 0$ gilt. Somit folgt

$$\ker \phi = \left\{ a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n > 0. \quad a_n = 0 \right\} .$$

Wegen $\ker \phi \neq \{ 0 \}$ ist ϕ nicht injektiv.

Eine Folge $a = (a_n)_n$ liegt genau dann im Kern von ψ, wenn $a_0 = 0$ gilt, d.h. es gilt

$$\ker \psi = \left\{ a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_0 = 0 \right\}$$

Wegen $\ker \psi \neq \{ 0 \}$ ist auch ψ nicht injektiv.

Ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ liegt genau dann im Kern von $\tilde{\psi}$, wenn $0 = a_0 = \psi(p)$ gilt. Die Menge

$$\ker \tilde{\psi} = \left\{ p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\middle|\; a_0 = 0 \right\}$$

besteht also aus allen Polynomen ohne konstantes Glied. Insbesondere gilt $\ker \tilde{\psi} \neq \{ 0 \}$, so dass $\tilde{\psi}$ nicht injektiv ist.

(T 4) Schnitte

Sei V ein Vektorraum und $V_1, V_2 \subseteq V$ lineare Teilräume.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch der Schnitt $V_1 \cap V_2$ ein linearer Teilraum ist.

(b) Betrachten Sie erneut die Beispiele aus Aufgabe T1 bzw. Aufgabe T2. Bestimmen Sie alle Elemente des Schnittes $\ker \phi \cap \ker \psi$ bzw. $\ker \tilde{\phi} \cap \ker \tilde{\psi}$.

LÖSUNG: (a) Seien $v, w \in V_1 \cap V_2$ und $\lambda \in K$. Dann gilt auch $v, w \in V_1$ und somit $v + w, \lambda v \in V_1$. Analog gilt $v + w, \lambda v \in V_2$ und somit $v + w, \lambda v \in V_1 \cap V_2$.

(b)

$$\ker \phi \cap \ker \psi = \{ 0 \} \qquad\qquad \ker \tilde{\phi} \cap \ker \tilde{\psi} = \{ 0 \}$$

(T 5) Bilder und Urbilder

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum von V, so ist dessen Bild

$$\varphi(U) = \{ \varphi(v) \mid v \in U \}$$

ein linearer Teilraum von W.

(b) Zeigen Sie: Ist $U \subseteq W$ ein linearer Teilraum von W, so ist dessen Urbild

$$\varphi^{-1}(U) = \{ v \in V \mid \varphi(v) \in U \}$$

ein linearer Teilraum von V.

(c) Folgern Sie daraus, dass der Kern $\ker \varphi = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}$ und das Bild $\varphi(V) = \{ \varphi(v) \mid v \in V \}$ lineare Teilräume sind (vgl. Aufgabe T3).

(d) Betrachten Sie erneut die Beispiele aus Aufgabe T1 bzw. Aufgabe T2. Bestimmen sie das Bild von ϕ und ψ bzw. $\tilde{\phi}$ und $\tilde{\psi}$.

(e*) Zeigen Sie $\phi^{-1}(\ell^\infty) \subseteq c_0$. (In der Analysis wird der Teilraum $\phi^{-1}(\ell^\infty)$ oft mit $\mathcal{O}(n)$ bezeichnet.)

LÖSUNG: (a) Seien $w_1, w_2 \in U$ und $\lambda \in K$. Dann gibt es Element $v_1, v_2 \in U$ mit $w_1 = \varphi(v_1)$ und $w_2 = \varphi(v_2)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \, , \\ \lambda w_1 &= \lambda \, \varphi(v_1) = \varphi(\lambda \, v_1) \, . \end{aligned}$$

Weil auch $v_1 + v_2$ und λv_1 in U liegen, gilt $w_1 + w_2, \lambda w_1 \in \phi(U)$.

(b) Seien $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(U)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in U$. Weil U ein linearer Teilraum ist, gilt dann auch $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in U$ und $\varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1) \in U$, d.h. die Vektoren $v_1 + v_2$ und λv_1 liegen im Urbild $\varphi^{-1}(U)$.

(c) Weil $\{ 0 \} \subseteq V$ und V selbst lineare Teilräume sind, folgt, dass auch $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{ 0 \})$ und $\varphi(V) = \{ \varphi(v) \mid v \in V \}$ lineare Teilräume sind.

(d) Für $\tilde{\phi}$ vergleiche Aufgabe T7 des 6. Tutoriums.

Für ϕ: Jede Folge $a = (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ liegt im Bild, denn setzen wir $b := (b_n)_n$ mit

$$b_0 := 0 \qquad\qquad b_n := \frac{a_{n-1}}{n}$$

für alle $n > 0$, so gilt $a = \phi(b)$. Somit folgt

$$\phi(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \, .$$

Der Vektorraum $\mathbb{R}$ besitzt nur zwei lineare Teilräume, nämlich $\{ 0 \}$ und $\mathbb{R}$ selbst. Weil sich für die konstante 1-Folge $\psi(1) = 1$ ergibt, muss $\psi(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{R}$ gelten.

Analog ergibt sich für das konstante 1-Polynom $\tilde{\psi}(1) = 1$ und somit $\tilde{\psi}(\mathbb{R}[x]) = \mathbb{R}$.