Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

6. Tutorium

(T 1) Restklassenringe

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ die durch $\varphi(z) = [z]$ gegebene Abbildung.

(a) Ist φ ein Gruppenhomomorphismus ?

(b) Bestimmen Sie die Menge $\varphi^{-1}([0]) \subseteq \mathbb{Z}$. Ist $\varphi^{-1}([0]) \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$?

(T 2) Kern und Bild

Es seien $(G, \cdot, \{1\})$ und $(H, \cdot, \{1\})$ Gruppen sowie $\varphi : G \to H$ eine Gruppenhomomorphismus. Wir definieren durch $\mathrm{Ker}\ \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}$ den *Kern von* φ und durch $\mathrm{Im}\ \varphi := \varphi(G) \subseteq H$ das *Bild von* φ.

(a) Ist die Menge $\mathrm{Ker}\ \varphi$ immer eine Untergruppe von G?

(b) Ist die Menge $\mathrm{Im}\ \varphi$ immer eine Untergruppe von H?

(T 3) Endliche Vektorräume

Wieveile Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{Z}_3^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}_3$?

(T 4) Gaußalgorithmus

Bestimme über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ die Lösungsmenge des lineares Gleichungssystems $Ax = b$, welches durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und den Vektor} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

(T 5) Unterkörper

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Teilmenge $\mathbb{F}$ von $\mathbb{K}$, welche 0 und 1 enthält, heißt *Unterkörper*, wenn $\mathbb{F}$ mit der Addition und der Multiplikation von $\mathbb{K}$ ein Köper ist. Dies bedeutet insbesondere, daß alle Produkte und Inversen von Elementen aus $\mathbb{F}$ auch in $\mathbb{F}$ liegen!

(a) Geben Sie nichtriviale Beispiele für Unterkörper.

(b) Definieren Sie eine Addition $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und eine Skalarmultiplikation $\mathbb{F} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, welche $\mathbb{K}$ zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}$ macht. Geben Sie auch hier nichtriviale Beispiele an.

(T 6) Dimension

Welche Dimension hat der Vektorraums $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{R}$? Geben Sie eine Basis an!

(T 7) Die Ableitung

Es sei die $\phi : \mathbb{R}[x] \to\mapsto \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto p'$ die Ableitungsabbildung, welche jedem Polynom p seine Ableitung p' zuordnet.

(a) Ist ϕ linear?

(b) Bestimmen Sie den Kern von ϕ.

(c) Bestimmen Sie das Bild von ϕ.

(d) Ist ϕ injektiv? Ist ϕ surjektiv?