Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

6. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Restklassenringe

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ die durch $\varphi(z) = [z]$ gegebene Abbildung.

(a) Ist φ ein Gruppenhomomorphismus ?

(b) Bestimmen Sie die Menge $\varphi^{-1}([0]) \subseteq \mathbb{Z}$. Ist $\varphi^{-1}([0]) \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$?

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung φ bildet das neutrale Element $0 \in \mathbb{Z}$ auf das neutrale Element $[0] \in \mathbb{Z}_n$ ab. Weiterhin vertauscht sie mit den Multiplikationenen, denn es gilt $\varphi(a \cdot b) = [a \cdot b] = [a] \cdot [b] = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$. (Dies ist aus der letzten Übung bekannt.) Somit ist φ ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}([0]) &= \{z \in \mathbb{Z} \mid \varphi(z) = [0]\} \\
&= \{z \in \mathbb{Z} \mid [z] = [0]\} \\
&= \{z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv 0 \pmod{n}\} \\
&= n \cdot \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Aus der vorletzen Übung ist bekannt, daß dies eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist.

(T 2) Kern und Bild

Es seien $(G, \cdot, \{1\})$ und $(H, \cdot, \{1\})$ Gruppen sowie $\varphi : G \to H$ eine Gruppenhomomorphismus. Wir definieren durch $\operatorname{Ker} \varphi := \{g \in \mathbb{G} \mid \varphi(g) = 1\}$ den *Kern von* φ und durch $\operatorname{Im} \varphi := \varphi(G) \subseteq H$ das *Bild von* φ.

(a) Ist die Menge $\operatorname{Ker} \varphi$ immer eine Untergruppe von G?

(b) Ist die Menge $\operatorname{Im} \varphi$ immer eine Untergruppe von H?

LÖSUNG:

(a) Die Menge enthält $\operatorname{Ker} \varphi$ nach Definition immer das neutrale Element 1. Weiterhin gilt für alle $a \in \operatorname{Ker} \varphi$ auch $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Somit enthält $\operatorname{Ker} \varphi$ zu jedem element auch sein Inverses. Darüberhinaus gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = 1 \cdot 1 = 1$ für alle $a, b \in \operatorname{Ker} \varphi$. Somit ist $\operatorname{Ker} \varphi$ eine Untergruppe von G.

(b) Das Bild $\operatorname{Im} \varphi$ enthält das neutrale Element, da $\varphi(1) = 1 \in \varphi(G)$ gilt. Liegt $a \in \varphi(G)$ im Bild $\operatorname{Im} \varphi$, so gibt es ein Element $g \in G$, so daß $\varphi(g) = a$ gilt. Daraus folgt $a^{-1} = \varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \varphi(G)$, d.h. das Inverse a^{-1} zu a liegt auch im Bild. Für je zwei Elementen $a, b \in \varphi(G)$ gibt es Elemente, $g_1, g_2 \in G$, so daß $\varphi(g_1) = a$ und $\varphi(g_2) = b$ gilt. Hieraus folgt $a \cdot b = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_1) = \varphi(g_1 \cdot g_2) \in \varphi(G)$. Somit ist $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H.

(T 3) Endliche Vektorräume

Wieveile Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{Z}_3^n$ über dem Körper $\mathbb{Z}_3$?

LÖSUNG:

Der Vektorraum $\mathbb{Z}_3^n$ hat $|\mathbb{Z}_3|^n = 3^n$ Elemente.

(T 4) Gaußalgorithmus

Bestimme über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ die Lösungsmenge des lineares Gleichungssystems $Ax = b$, welches durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und den Vektor} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

LÖSUNG:

Wir führen die Gauß-Jordan-Elimination in $\mathbb{Z}_5$ durch und erhalten

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\
0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccccc}
\cdot_5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\
3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\
4 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

Wir können also die Nicht-Pivotvariable x_4 frei wählen. Wir setzen $x_4 := n \in \mathbb{Z}_5$. Durch Rückauflösen erhalten wir

$$x_3 = n + 4, \qquad x_2 = n + 3 \qquad \text{and} \qquad x_1 = n + 2.$$

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_5 \right\},$$

welche ein affiner Unterraum von $(\mathbb{Z}_5)^4$ ist.

(T 5) Unterkörper

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Teilmenge $\mathbb{F}$ von $\mathbb{K}$, welche 0 und 1 enthält, heißt *Unterkörper*, wenn $\mathbb{F}$ mit der Addition und der Multiplikation von $\mathbb{K}$ ein Köper ist. Dies bedeutet insbesondere, daß alle Produkte und Inversen von Elementen aus $\mathbb{F}$ auch in $\mathbb{F}$ liegen!

(a) Geben Sie nichtriviale Beispiele für Unterkörper.

(b) Definieren Sie eine Addition $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und eine Skalarmultiplikation $\mathbb{F} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, welche $\mathbb{K}$ zu einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}$ macht. Geben Sie auch hier nichtriviale Beispiele an.

LÖSUNG:

(a) Als konkrete Beispiele nehmen wir $\mathbb{C}$ als Vectorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

(b) Als Vektorraum-Addition auf $\mathbb{K}$ nehmen wir die Körper-Addition, mit der $\mathbb{K}$ bereits ausgestattet ist. Als skalare Multiplikation $\mathbb{F} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ nehmen wir die Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ des Körpers $\mathbb{K}$. Wir verifizieren nun die Vektorraumaxiome (V1) bis (V8).

(V1-V4) Diese Axiome sind erfüllt, da der Körper $\mathbb{K}$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition ist. Als Nullvektor dient die Null des Körpers.

(V5) Für alle $v \in \mathbb{K}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ gilt $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, da das Assiziativgesetz in $\mathbb{K}$ gilt.

(V6) Für alle $v \in \mathbb{K}$ gilt $1v = v$, da 1 das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{K}$ ist.

(V7-V8) Diese Axiome sind erfüllt, da das Distributivgesetz und die Kommutativität im Körper $\mathbb{K}$ gelten.

Beispiele sind z.B. die Beispiele aus a).

(T 6)

Welche Dimension hat der Vektorraums $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{R}$? Geben Sie eine Basis an!

LÖSUNG:

Per Definition ist eine komplexe Zahl ein Element aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} +_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

In $\mathbb{C}$ finden wir $\mathbb{R}$ wieder, und zwar als Teilmenge $\mathbb{R} \times \{0\}$. Mit G28 schließen wir, dass $\mathbb{C}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, welche in $\mathbb{C}$ auch schlicht 1 und i genannt werden, bilden eine Basis von $\mathbb{C}$, da sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind. Also ist die Dimension von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ gleich 2.

(T 7)

Es sei die $\phi : \mathbb{R}[x] \to\mapsto \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto p'$ die Ableitungsabbildung, welche jedem Polynom p seine Ableitung p' zuordnet.

(a) Ist ϕ linear?

(b) Bestimmen Sie den Kern von ϕ.

(c) Bestimmen Sie das Bild von ϕ.

(d) Ist ϕ injektiv? Ist ϕ surjektiv?

LÖSUNG:

(a) Wir rechnen die beiden definierenden Eigenschaften der Linearität nach:

(L1) Für zwei Elemente p_1 und $p_2 \in \mathbb{R}[x]$ gilt

$$\phi(p_1 + p_2) = (p_1 + p_2)' = p_1' + p_2' = \phi(p_1) + \phi(p_2).$$

(L2) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p_2 \in \mathbb{R}[x]$ gilt $\phi(\lambda p_2) = (\lambda p_2)' = \lambda(p_2') = \lambda\phi(p_2)$.

Somit ist ϕ linear.

(b) Der Kern von ϕ ist diejenige Teilmenge von $\mathbb{R}[x]$, welche von Funktionen erzeugt wird, deren Ableitung überall verschwindet (d.h. konstant Null ist). Mit anderen Worten handelt es sich dabei um die konstanten Funktionen.

(c) Jede Funktion in $\mathbb{R}[x]$ hat eine Stammfunktion in $\mathbb{R}[x]$. Also ist das Bild von ϕ wiederum $\mathbb{R}[x]$.

(d) ϕ ist nicht injektiv, da ihr Kern nicht $\{0\}$ ist. Allerdings ist ϕ surjektiv gemäß Aufgabenteil c).