Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 06.11.07

Lineare Algebra I

5. Tutorium

(T 1)

Welche Gruppen kennen Sie? Welche davon sind abelsch?

Wir wollen in diesem Tutorium weitere typische Beispiele von – evtl. nicht abelschen – Gruppen kennen lernen.

(T 2) Eine „Lineare Gruppe"

Für eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren wir die *Determinante*

$$\det A := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für 2×2-Matrizen A, B gilt:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

(b) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine 2×2-Marix. Betrachten Sie die folgenden beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des ersten und $y \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des zweiten Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass dann für die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind beide Systeme eindeutig lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen.

(d) Zeigen Sie damit, dass die Menge $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ aller Matrizen A mit $\det A \neq 0$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.

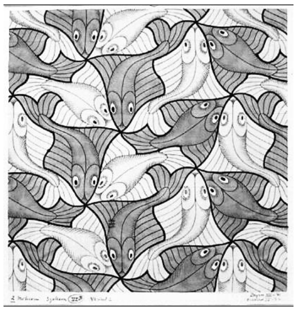
(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ nicht abelsch ist.

(f) (offene Aufgabe) Finden Sie Untergruppen von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Sind diese Untergruppen jeweils abelsch?

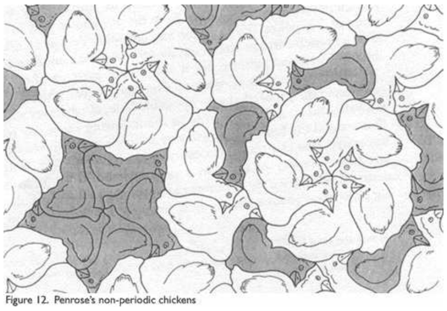
(T 3) Symmetrie- und Transformationsgruppen

Stellen Sie sich ein unendlich großes Blatt Papier vor, welches komplett mit dem Muster aus Abbildung 1(a) bemalt ist.

(a) Wie könnte man das Blatt Papier transformieren, damit das Muster hinterher genau deckungsgleich zum vorherigen Muster ist? Was passiert, wenn man dabei nicht zwischen schwarzen Fischen und weißen Fischen unterscheidet?



(a) Bild von M.C. Escher



(b) Tiling nach R. Penrose

Abbildung 1: Bild von M.C. Escher

(b) Erklären Sie, warum die Menge aller Transformationen des Blattes mit dieser Eigenschaft eine Gruppe bildet (Verknüpfung, neutrales Element, Inverse). Diese Gruppe heißt die Symmetriegruppe der „Pflasterung“ bzw. des Musters.

(c) Können Sie auch für eine beliebige Bemalung der Ebene eine Symmetriegruppe definieren?

(d) (offene Aufgabe) Kann man auch mit dem Muster aus Abbildung 1(b) das komplette Blatt bemalen? Was ist die entsprechende Symmetriegruppe?

(T 4) Die Diedergruppe

Sei $n \geq 3$. Wir betrachten ein gleichseitiges n-Eck mit den Eckpunkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Die Diedergruppe D_n ist die Menge aller (längenerhaltenden) Transformationen, die das n-Eck wieder in sich überführen (z.B. Spiegelungen oder Drehungen).

(a) Machen Sie sich klar, dass D_n eine Gruppe bildet.

(b) In den Übungen haben wir bereits gesehen, dass die Menge $S(M)$ der Permutationen von $M := \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Gruppe bildet. Wie lässt sich eine Transformation in D_n eindeutig als Permutation der Eckpunkte $p_1, \ldots, p_n$ darstellen? Folgern Sie, dass sich D_n als Untergruppe von $S(M)$ auffassen lässt.

(c) Gilt $D_n = S(M)$?

(d) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

(e) (offene Aufgabe) Finden Sie eine möglichst große echte Untergruppe von D_n. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe abelsch ist.