Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 06.11.07

Lineare Algebra I

5. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Welche Gruppen kennen Sie? Welche davon sind abelsch?

Wir wollen in diesem Tutorium weitere typische Beispiele von – evtl. nicht abelschen – Gruppen kennen lernen.

(T 2) Eine „Lineare Gruppe"

Für eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren wir die *Determinante*

$$\det A := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für 2×2-Matrizen A, B gilt:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

(b) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine 2×2-Marix. Betrachten Sie die folgenden beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des ersten und $y \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des zweiten Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass dann für die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

(c) Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind beide Systeme eindeutig lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen.

(d) Zeigen Sie damit, dass die Menge $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ aller Matrizen A mit $\det A \neq 0$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ nicht abelsch ist.

(f) (offene Aufgabe) Finden Sie Untergruppen von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Sind diese Untergruppen jeweils abelsch?

LÖSUNG: (a) Sei $A =: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A \cdot b) &= \det \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) \\ &= (b_1c_1b_2c_2 + a_1d_1a_2d_2) - (b_1c_1a_2d_2 + a_1d_1b_2c_2) \\ (\det A)(\det B) &= (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \\ &= a_1d_1a_2d_2 - b_1c_1a_2d_2 - a_1d_1b_2c_2 + b_1c_1b_2c_2 \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

(b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 & ay_1 + by_2 \\ cx_1 + dx_2 & cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Wir betrachten zuerst den Fall $a \neq 0$ und lösen beide Systeme parallel mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \det A & -c & a \end{array}$$

Beide Systeme sind also genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist die Lösung durch

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-c}{\det A} & \qquad x_1 &= \frac{1 - bx_2}{a} = \frac{\det A + bc}{a \cdot \det A} = \frac{d}{\det A} \\ y_2 &= \frac{a}{\det A} & \qquad y_1 &= \frac{-by_2}{a} = \frac{-b}{\det A} \end{aligned}$$

Völlig analog kann man den Fall $c \neq 0$ betrachten und erhält erneut, dass beide Systeme genau dann eindeutig lösbar sind, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Die Lösungen sind die selben wie bei $a \neq 0$.

Ist $a = 0$ und $c = 0$, so sieht man sofort, dass beide Systeme nicht *eindeutig* lösbar sind, weil für jede Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ auch $x' := (x'_1, x_2)^T$ mit beliebigen $x'_1 \in \mathbb{R}$ eine Lösung ist (und analog für y).

Weil aus $a = 0$ und $c = 0$ auch $\det A = 0$ folgt, ergibt sich zusammenfassend: Die Systeme sind genau dann beide eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ gilt.

(d) **Wohldefiniertheit:** Wir müssen zuerst zeigen, dass sich bei der Multiplikation zweier Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ wieder Matrix in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ergibt. Seien hierzu $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, d.h. $\det A \neq 0 \neq \det(B)$. Dann gilt

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \neq 0 \ ,$$

d.h. das Produkt $A \cdot B$ liegt wieder in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Assoziativität: wurde bereits in der Vorlesung gezeigt.

neutrales Element: Die Matrix $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ liegt in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ wegen $\det E = 1$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $AE = A = EA$ für alle 2×2-Matrizen A gilt, also insbesondere für alle Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

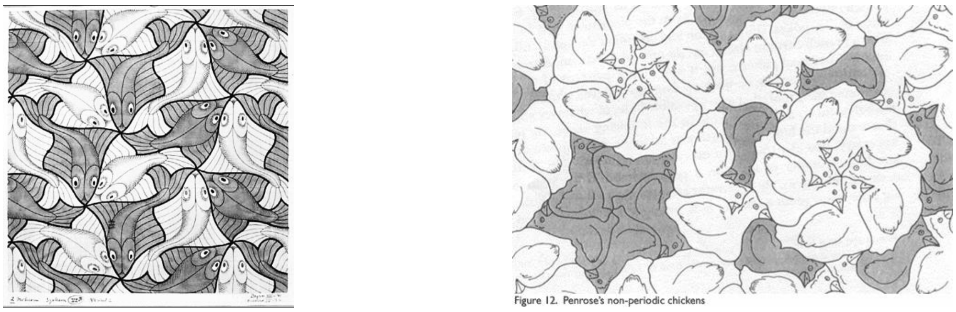
Inverse: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Wir setzen

$$B := \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Die Matrix B liegt in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ wegen $\det B = (da - bc)/(\det A)^2 = 1/(\det A) \neq 0$. In Teil (b) und (c) haben wir gezeigt, dass für diese Matrix $A \cdot B = E$ gilt. Man rechnet auch leicht nach, dass auch $B \cdot A = E$ gilt. Somit ist B die Inverse von A.

(e) Wir betrachten z.B. die Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Beide liegen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ wegen $\det A = 2$ und $\det B = 1$, aber man rechnet leicht nach:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$



(a) Bild von M.C. Escher

(b) Tiling nach R. Penrose

Abbildung 1: Bild von M.C. Escher

(T 3) Symmetrie- und Transformationsgruppen

Stellen Sie sich ein unendlich großes Blatt Papier vor, welches komplett mit dem Muster aus Abbildung 1(a) bemalt ist.

(a) Wie könnte man das Blatt Papier transformieren, damit das Muster hinterher genau deckungsgleich zum vorherigen Muster ist? Was passiert, wenn man dabei nicht zwischen schwarzen Fischen und weißen Fischen unterscheidet?

(b) Erklären Sie, warum die Menge aller Transformationen des Blattes mit dieser Eigenschaft eine Gruppe bildet (Verknüpfung, neutrales Element, Inverse). Diese Gruppe heißt die Symmetriegruppe der „Pflasterung“ bzw. des Musters.

(c) Können Sie auch für eine beliebige Bemalung der Ebene eine Symmetriegruppe definieren?

(d) (offene Aufgabe) Kann man auch mit dem Muster aus Abbildung 1(b) das komplette Blatt bemalen? Was ist die entsprechende Symmetriegruppe?

Lösung: (a) Man könnte das Blatt z.B. geeignet nach rechts bzw. links verschieben. Auch bestimmte Drehspiegelungen sind möglich. Wer sich ein „durchsichtiges“ Blatt Papier vorstellt, kann das Blatt auch komplett umdrehen und so spiegeln. Unterscheidet man nicht zwischen schwarzen und weißen Fischen, so ergeben sich mehr Möglichkeiten, das Blatt zu transformieren. Wer nicht zwischen schwarzen und weißen Fischen unterscheidet, kann das Blatt auch z.B. auch so rotieren, dass ein vorher weißer Fisch danach auf einem schwarzen Fisch landet.

(b) Als Verknüpfung betrachten wir die Hintereinanderausführung der Transformationen. Überführt nämlich eine Transformation σ das Muster wieder in sich und eine weitere Transformation τ ebenso, so überführt auch die Hintereinanderausführung $\tau \circ \sigma$ wieder das Muster in sich. Das Neutralelement ist die Transformation, welche das Blatt nicht bewegt. Das Inverse einer Transformation ist die Transformation, welche das Blatt gerade wieder zurück verschiebt bzw. dreht bzw. spiegelt.

(c) Ja, nämlich genau auf die selbe Weise: Die Symmetriegruppe besteht aus den Transformationen, welche die Bemalung in eine deckungsgleiche Bemalung transformieren.

(T 4) Die Diedergruppe

Sei $n \geq 3$. Wir betrachten ein gleichseitiges n-Eck mit den Eckpunkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Die Diedergruppe D_n ist die Menge aller (längenerhaltenden) Transformationen, die das n-Eck wieder in sich überführen (z.B. Spiegelungen oder Drehungen).

(a) Machen Sie sich klar, dass D_n eine Gruppe bildet.

(b) In den Übungen haben wir bereits gesehen, dass die Menge $S(M)$ der Permutationen von $M := \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Gruppe bildet. Wie lässt sich eine Transformation in D_n eindeutig als Permutation der Eckpunkte $p_1, \dots, p_n$ darstellen? Folgern Sie, dass sich D_n als Untergruppe von $S(M)$ auffassen lässt.

(c) Gilt $D_n = S(M)$?

(d) Zeigen Sie, dass D_n nicht abelsch ist.

(e) (offene Aufgabe) Finden Sie eine möglichst große echte Untergruppe von D_n. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe abelsch ist.

LÖSUNG: (a) Die Verknüpfung bildet die Hintereinanderausführung. Das neutrale Element ist die Transformation, die das n-Eck unverändert lässt. Wir schreiben hierfür Id.

(b) Jede Transformation des n-Ecks transformiert eine Ecke wieder auf eine Ecke. Somit lässt sich jeder Transformation α auch eine Permutation der Ecken zuordnen durch

$$\sigma_\alpha : M \to M, \quad p_i \mapsto \alpha(p_i) \ .$$

Durch diese Permutation ist α eindeutig bestimmt, denn durch das Bild aller Eckpunkte ist eine Transformation des n-Ecks eindeutig bestimmt. (Genauer genügt schon das Bild zweier nebeneinander liegender Eckpunkte.)

Außerdem gilt für alle Transformationen α, β des n-Ecks

$$\sigma_{\mathrm{Id}} = \mathrm{id}_M \qquad \sigma_{\alpha\circ\beta} = \sigma_\alpha \circ \sigma_\beta \qquad \sigma_{(\alpha^{-1})} = (\sigma_\alpha)^{-1}$$

Statt mit Transformationen des n-Ecks zu rechnen können wir also auch mit den zugehörigen Permutationen in $S(M)$ rechnen. Wir identifizieren im Folgenden D_n mit der Teilmenge $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in D_n\} \subseteq S(M)$. (Dies ist nach den obigen Rechenregeln eine Untergruppe von $S(M)$.)

(c) Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass $p_1, \dots, p_n$ auch in dieser Reihenfolge im n-Eck auftauchen, d.h. p_i ist jeweils mit p_{i+1} bzw. p_n mit p_1 verbunden.

Für $n = 3$ gilt dann $D_3 = S(M)$. Man überlegt sich hier leicht, dass alle 6 Elemente von $S(M)$ auch durch Transformationen des Dreiecks darstellbar sind.

Für $n > 3$ gilt hingegen $D_n \neq S(M)$. Hier liegt z.B. die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$$

nicht in D_n, weil es keine zugeörige Transformation des n-Ecks gibt. Die Transformation müsste alle Eckpunkte bis auf p_2 und p_3 gleich lassen und die Punkte p_2 und p_3 vertauschen. Doch eine solche Transformation überführt nicht das n-Eck in sich.

(d) Wir betrachten eine Drehung des n-Ecks α und eine Spiegelung β mit den zugehörigen Permutationen

$$\tau_\alpha := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_n & p_1 \end{pmatrix}, \qquad \tau_\beta := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_1 & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung $\alpha \circ \beta$ bzw. $\beta \circ \alpha$ haben dann die zugehörige Permutationen

$$\tau_{\alpha\circ\beta} = \tau_\alpha \circ \tau_\beta = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_2 & p_1 & p_n & \cdots & p_4 & p_3 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{\beta\circ\alpha} = \tau_\beta \circ \tau_\alpha = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt wieder Tanzkurse!

Anfängerkurs: Für alle, die Grundschritte in verschiedenen Gesellschaftstänzen erlernen möchten, findet ab dem 8. November jeweils **donnerstags 18:30 Uhr** im **Raum S103/313** unser Einsteigerkurs mit Miriam und Markus statt.

Freies Tanzen: Wer schon Erlerntes wiederholen, sich mit anderen Tanzpaaren austauschen und vielleicht noch die ein oder anderen Schritte aneignen möchte, ist hier genau richtig. Ab dem 12. November findet immer **montags** ab **18:00 Uhr** unter Leitung von Christina und Sebastian das 'Freie Tanzen' statt, ebenfalls im Raum **S103/313.**
Getanzt wird alles von der Cha Cha über den Langsamen Walzer bis hin zur Salsa.

Wünsche dürfen in beiden Kursen geäußert werden!

Zum Vormerken:
Der Matheball ist für den 28. Juni 2008 geplant.

Die Ball-AG, Fachschaft Mathematik