Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

4. Tutorium

(T 1) Die Assoziativität der Matrizenmultiplikation.

Es seien A eine $m \times n$-, B eine $n \times p$- und C eine $p \times q$-Matrix.

(a) Wieviel Zeilen und wieviel Spalten haben die Matrizen (AB), BC und $A(BC)$?

(b) Geben Sie eine Formel für die Einträge $(A(BC))_{il}$ und eine Formel für die Einträge $((AB)C)_{il}$ an.

(c) Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation.

(T 2) Matrizenmultiplikation

Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (2, -4, 6), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle möglichen Matrizenprodukte mit zwei Faktoren.

(T 3) Orthogonalraum

Das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist für Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ durch

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v \cdot w^T = (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

gegeben. Es sei $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, daß die Menge $A^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

(T 4) Matrizenmultiplikation

Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB, AC, BC, BA, CA und AC^T, falls diese definiert sind. Welche der Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$ können Sie bilden?

(T 5) Matrizenmultiplikation

Finden Sie quadratische Matrizen A, B, C, D gleicher Dimension für die $AB \neq BA$, $CD = DC$ und $C \neq D$ gilt.

(T 6) Inverse Matrizen

Es sei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Eine $(n \times n)$-Matrix A^{-1} heißt Inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}A = E$ gilt. Bestimmen Sie die Inverse der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.