Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es seien A eine $m \times n$-, B eine $n \times p$- und C eine $p \times q$-Matrix.

(a) Wieviel Zeilen und wieviel Spalten haben die Matrizen (AB), BC und $A(BC)$?

(b) Geben Sie eine Formel für die Einträge $(A(BC))_{il}$ und eine Formel für die Einträge $((AB)C)_{il}$ an.

(c) Beweisen Sie das Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation.

Lösung:

(a) Die Matrix AB ist eine $m \times p$-Matrix, die Matrix BC ist eine $n \times q$-Matrix und die Matrix $A(BC)$ ist eine $m \times q$-Matrix.

(b) Nach Definition der Matrixmultiplikation ist der Eintrag $(BC)_{jl}$ durch $(BC)_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$ gegeben. Es folgt

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{il} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(BC)_{jl} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.
\end{aligned}$$

Nach Definition der Matrixmultiplikation ist der Eintrag $(AB)_{ik}$ durch $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ gegeben. Es folgt

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{il} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik}c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}.
\end{aligned}$$

(c) Nach Aufgabenteil b) Sind die Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich. Da dies für beliebige $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ und Matrizen in obiger Größe gilt, ist die Matrixmultiplikation assoziativ.

(T 2) Matrizenmultiplikation

Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (2, -4, 6), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle möglichen Matrizenprodukte mit zwei Faktoren.

LÖSUNG:

Die möglichen Produkte sind

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \\ 6 & -12 & 18 \end{pmatrix}, \quad BA = 12, \quad BC = (-30, 10),$$

$$DA = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ -1 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(T 3)

Das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist für Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ durch

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := v \cdot w^T = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

gegeben. Es sei $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, daß die Menge $A^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

LÖSUNG:

Die Menge $A^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ ist die Lösungsmenge des linearen homogenen Gleichungssystems $v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n =$. Da Lösungsmengen linearer homogener Gleichungssysteme lineare Unterräume sind, ist auch $A^\perp$ ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

(T 4)

Berechnen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB, AC, BC, BA, CA und AC^T, falls diese definiert sind. Welche der Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$ können Sie bilden?

LÖSUNG:

(1) AB: nicht möglich, denn die Anzahl der Spalten von A stimmt nicht mit der Zeilenanzahl von B überein.

(2) AC: nicht möglich.

(3) BC: möglich, "Zeile mal Spalte".

$$BC = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) BA: nicht möglich.

(5) CA: möglich.

$$CA = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 12 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) AC^T: möglich.

$$\begin{aligned} AC^T &= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Keine der Summen kann gebildet werden. Die Dimensionen stimmen nicht überein.

(T 5)

Finden Sie quadratische Matrizen A, B, C, D gleicher Dimension für die $AB \neq BA$, $CD = DC$ und $C \neq D$ gilt.

Lösung: E

s sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

Weiter sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $C \neq D$ und

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = DC.$$

(T 6)

Es sei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Eine $(n \times n)$-Matrix A^{-1} heißt Inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}A = E$ gilt. Bestimmen Sie die Inverse der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

LÖSUNG:

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$