Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 25./26.10.2007

Lineare Algebra I

3. Tutorium

(T 1)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ lineare Teilräume. Wir definieren

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\} .$$

(a) Zeige, dass auch $U + V$ und $U \cap V$ lineare Teilräume sind.

(b) Wann ist $U \cup V$ ein linearer Teilraum?

(T 2)

Eine Teilmenge der Form $g = \{v + \lambda \cdot r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit Vektoren $v, r \in \mathbb{R}^n, r \neq 0$ ist eine *Gerade* im $\mathbb{R}^n$. Der Vektor r heißt dabei *Richtungsvektor* der Geraden g.

(a) Wann sind zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ parallel?

(b) Seien g_1 und g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit Richtungsvektoren $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) Es gibt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_2 = g_1 + x$.

   (ii) Die Richtungsvektoren r_1, r_2 sind linear abhängig.

   (iii) Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel.

(T 3) Nullstellensatz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich n. Wir betrachten die Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n, a \mapsto p_a$, die jedem Vektor $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Polynomfunktion $p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1}$ zuordnet.

(a) Mache dir klar, dass die Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n,\ a \mapsto p_a$ surjektiv ist.

(b) Zeige, dass für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p_{a_1+a_2}(x) = p_{a_1}(x) + p_{a_2}(x) , \qquad p_{\lambda \cdot a_1}(x) = \lambda \cdot p_{a_1}(x)$$

und beweise damit, das die folgenden Teilmengen lineare Teilräume sind:

$$\begin{aligned} V_{\text{const}} &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_a \text{ ist konstant}\} , \\ V_1 &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_a(0) = 0\} , \\ V_2 &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists b \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall x \in \mathbb{R} : \quad p_a(x) = x \cdot p_b(x)\} . \end{aligned}$$

(c) Beweise, dass sich jede Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_n$ mit einer Nullstelle im Punkt 0 als Produkt $p(x) = x \cdot p'(x)$ mit einer Polynomfunktion $p' \in \mathcal{P}_n$ schreiben lässt.

Hinweis: Was hat das Problem mit den linearen Teilräumen V_1 und V_2 zu tun?

(d) Beweise, dass sich jede Polynomfunktion p mit Nullstelle in einem Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ als ein Produkt $p(x) = (x - \lambda) \cdot p'(x)$ mit einer Polynomfunktion p' schreiben lässt.

Kannst du auch diese Aussage als Gleichung von linearen Teilräumen schreiben?