Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008 25./26.10.2007

Lineare Algebra I

3. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ lineare Teilräume. Wir definieren

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\} .$$

(a) Zeige, dass auch $U + V$ und $U \cap V$ lineare Teilräume sind.

(b) Wann ist $U \cup V$ ein linearer Teilraum?

Lösung:

(a) (i) für $U + V$:
Seien $x, y \in U + V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $u_x, u_y \in U$ und $v_x, v_y \in V$ mit $x = u_x + v_x$ und $y = u_y + v_y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x + y &= u_x + v_x + u_y + v_y = (u_x + u_y) + (v_x + v_y) , \\ \lambda x &= \lambda u_x + \lambda v_x . \end{aligned}$$

Weil U und V lineare Teilräume sind, gilt $u_x + u_y \in U$, $v_x + v_y \in V$ und $\lambda x \in U$. Somit liegen auch $x + y$ und λx in $U + V$.

(ii) für $U \cap V$
Seien $x, y \in U \cap V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Weil x und y im linearen Teilraum U *und* im linearen Teilraum V liegen, liegt auch $x + y$ und λx im Teilraum U und im Teilraum V. D.h. es gilt $x + y \in U \cap V$ und $\lambda x \in U \cap V$.

(b) Die Teilmenge $U \cup V$ ist genau dann ein linearer Teilraum, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt. In diesen beiden Fällen gilt $U \cup V = V$ bzw. $U \cup V = U$. Weil U und V lineare Teilräume sind, ist in diesem Fall auch $U \cup V$ ein linearer Teilraum. Zum Beweis genügt es also zu zeigen, dass in allen anderen Fällen $U \cup V$ kein linearer Teilraum ist.

Sei also weder $U \subseteq V$ noch $V \subseteq U$. Dann gibt es ein Element $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \in U \setminus V$ und ein Element $y \in V \setminus U$. Beide Elemente liegen in der Vereinigung $U \cup V$. Wir nehmen nun an, dass $U \cup V$ ein linearer Teilraum wäre. Dann müsste auch die Summe $x + y$ in $U \cup V$ liegen. Liegt $x + y$ in U, dann liegt auch $y = x + y - x$ in U (Widerspruch). Analog: liegt $x + y$ in V, dann liegt auch $x = x + y - y$ in V (Widerspruch).

(T 2)

Eine Teilmenge der Form $g = \{v + \lambda \cdot r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit Vektoren $v, r \in \mathbb{R}^n, r \neq 0$ ist eine *Gerade* im $\mathbb{R}^n$. Der Vektor r heißt dabei *Richtungsvektor* der Geraden g.

(a) Wann sind zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ parallel?

(b) Seien g_1 und g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$ mit Richtungsvektoren $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) Es gibt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_2 = g_1 + x$.

   (ii) Die Richtungsvektoren r_1, r_2 sind linear abhängig.

   (iii) Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel.

LÖSUNG:

(a) Zwei Möglichkeiten, Parallelität von Gerade zu definieren, findet man in Aufgabenteil (b)(i) und Aufgabenteil (b)(ii). Eine weitere Möglichkeit besteht darin, zu definieren: Zwei Geraden $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sind parallel, wenn für je zwei Punkte $x, y \in g_1$ der Abstand von x zu g_2 gleich dem Abstand von y zu g_2 ist. (Diese Definition ist allerdings für Aufgabenteil (b) nicht so günstig.)

(b) Sei $g_1 = \{v_1 + \lambda r_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 = \{v_2 + \lambda r_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- (i) $\Rightarrow$ (ii)
  Es gebe einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_2 = g_1 + x$. Es gilt $v_2 + r_2 \in g_2$ und somit

  $$r_2 \in g_2 - v_2 = g_1 + x - v_2 = \{\lambda r_1 + v_1 + x - v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  Es gibt also ein $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $r_2 = \lambda_1 r_1 + v_1 + x - v_2$. Weiter gilt $v_2 \in g_2$ und somit

  $$0 \in g_2 - v_2 = g_1 + x - v_2 = \{\lambda r_1 + v_1 + x - v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  Es gibt also ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_2 r_1 + v_1 + x - v_2$, also $v_1 + x - v_2 = (-\lambda_2) r_1$. Durch Einsetzen ergibt sich

  $$r_2 = \lambda_1 r_1 + v_1 + x - v_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) r_1 \ .$$

- (ii) $\Rightarrow$ (i)
  Die Richtungsvektoren r_1, r_2 seien linear unabhängig. Wegen $r_1 \neq 0 \neq r_2$ gibt es dann ein $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$ mit $r_2 = \mu r_1$. Somit gilt

  $$\begin{aligned} g_2 &= \{v_2 + \lambda\, \mu r_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{v_2 + \lambda r_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_1 + \lambda r_1 + (v_2 - v_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = g_1 + (v_2 - v_1)\} \ . \end{aligned}$$

(T 3) Nullstellensatz

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich n. Wir betrachten die Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n, a \mapsto p_a$, die jedem Vektor $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Polynomfunktion $p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_a(x) := \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1}$ zuordnet.

(a) Mache dir klar, dass die Funktion $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n,\ a \mapsto p_a$ surjektiv ist.

(b) Zeige, dass für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$p_{a_1+a_2}(x) = p_{a_1}(x) + p_{a_2}(x) \ , \qquad\qquad p_{\lambda \cdot a_1}(x) = \lambda \cdot p_{a_1}(x)$$

und beweise damit, das die folgenden Teilmengen lineare Teilräume sind:

$$\begin{aligned} V_{\text{const}} &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_a \text{ ist konstant}\} \ , \\ V_1 &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_a(0) = 0\} \ , \\ V_2 &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists b \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall x \in \mathbb{R} : \quad p_a(x) = x \cdot p_b(x)\} \ . \end{aligned}$$

(c) Beweise, dass sich jede Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_n$ mit einer Nullstelle im Punkt 0 als Produkt $p(x) = x \cdot p'(x)$ mit einer Polynomfunktion $p' \in \mathcal{P}_n$ schreiben lässt.

Hinweis: Was hat das Problem mit den linearen Teilräumen V_1 und V_2 zu tun?

(d) Beweise, dass sich jede Polynomfunktion p mit Nullstelle in einem Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ als ein Produkt $p(x) = (x - \lambda) \cdot p'(x)$ mit einer Polynomfunktion p' schreiben lässt.

Kannst du auch diese Aussage als Gleichung von linearen Teilräumen schreiben?

LÖSUNG:

(a) Die Funktion ist surjektiv, weil sich jede Polynomfunktion $p \in \mathcal{P}_n$ nach Definition als $p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben lässt, also als $p = p_a$ mit $a = (a_1, \dots, a_{n+1})^T$.

(b) Die Gleichungen verifiziert man durch direktes Nachrechnen. Mit diesen Gleichungen gilt dann

$$V_{\text{const}} = \{(\lambda, 0, \dots, 0)^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\} ,$$
$$V_1 = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a_1 = 0\} .$$

Dass V_{const} und V_1 lineare Teilräume sind, zeigt man dann analog zu den Beweisen in den Übungen.

Für V_2 zeigt man direkt, dass es sich dabei um einen linearen Teilraum handelt: Seien $a_1, a_2 \in V_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p_{a_1}(x) = x \cdot p_{b_1}(x) \qquad\qquad p_{a_2}(x) = x \cdot p_{b_2}(x)$$

gilt. Durch Addition bzw. Multiplikation mit λ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} p_{a_1+a_2}(x) &= p_{a_1}(x) + p_{a_2}(x) = x\, p_{b_1}(x) + x\, p_{b_2}(x) = x\big(p_{b_1}(x) + p_{b_2}(x)\big) \\ &= x \cdot p_{b_1+b_2}(x) , \\ p_{\lambda a_1}(x) &= \lambda\, p_{a_1}(x) = \lambda\, x\, p_{b_1}(x) = x\, p_{\lambda b_1}(x) . \end{aligned}$$

Somit gilt $a_1 + a_2 \in V_2$ und $\lambda a_1 \in V_2$.

(c) Sei $p \in \mathcal{P}_n$ eine Polynomfunktion mit Koeffizienten $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter gelte $p(0) = 0$. Dann folgt

$$0 = p(0) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k\, 0^{k-1} = a_1$$

Damit folgt $p(x) = \sum_{k=2}^{n+1} a_k x^{k-1} = x \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $p'(x) := \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} x^k$ ist dann einen Polynomfunktion $p' \in \mathcal{P}_n$ mit $p(x) = x \cdot p'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Behauptung ist äquivalent zu $V_1 = V_2$.

(d) Sei $p \in \mathcal{P}_n$ eine Polynomfunktion mit $p(\lambda) = 0$. Wir betrachten die Polynomfunktion $p_0(x) := p(x + \lambda)$. Diese Polynomfunktion hat dann eine Nullstelle im Punkt 0. Nach Teil (c) gibt es also ein $p_0' \in \mathcal{P}_n$ mit $p_0(x) = x \cdot p_0'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit dieser Funktion ergibt sich

$$p(x) = p_0(x - \lambda) = (x - \lambda) \cdot p_0'(x - \lambda)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $p'(x) := p_0'(x - \lambda)$ und erhalten so die gesuchte Polynomfunktion $p' \in \mathcal{P}_n$.

Auch diese Behauptung lässt sich als Gleichheit linearer Teilräume ausdrücken, nämlich mit den Teilräumen

$$\begin{aligned}
V_{1,\lambda} &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_a(\lambda) = 0\} \ , \\
V_{2,\lambda} &:= \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists b \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall x \in \mathbb{R} : \quad p_a(x) = (x - \lambda) \cdot p_b(x)\} \ .
\end{aligned}$$