**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

# Lineare Algebra I

## 2. Tutorium mit Lösungshinweisen

2

**(T 1)**

Zwei Autowaschanlagen liegen in unmittelbarer Nachbarschaft, so dass viele Kunden diejenige Anlage benutzen, die gerade frei ist. Innerhalb eines Monats hatte die erste 1020, die zweite 860 verschiedene Kunden. 662 Kunden ließen ihr Auto nur in der ersten Waschanlage reinigen. Wie viele Kunden ließen ihr Auto ausschließlich in der zweiten Waschanlage reinigen?

Betrachten Sie dazu die Mengen $A = \{\text{Kunden der ersten Waschanlage}\}, B = \{\text{Kunden der zweiten Waschanlage}\}$. Machen Sie sich anschaulich die Gültigkeit von $A = (A \cap B) \cup (A \cap \complement B), B = (A \cap B) \cup (B \cap \complement A)$ klar. Stellen Sie dann ein lineare Gleichungssystem für die Zahl der Elemente von $A \cap B$ und $B \cap \complement A$ auf.

**(T 2) Potenzmengen**

Schreiben Sie die Potenzmengen $\mathcal{P}(X)$ (=Menge aller Teilmengen von $X$) folgender Mengen auf (**Vorsicht: Die leere Menge $\emptyset$ ist immer eine Teilmenge.**):

(a) $X = \emptyset$ (b) $X = \{a\}$ (c) $X = \{a,b\}$ (d) $X = \{a,b,c\}$

Wieviel Elemente hat die Potenzmenge einer $n$-elementigen Menge für $n = 0,1,2$ oder 3. Ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ größer als $X$, kleiner oder gleich groß?

**(T 3)**

Ein kleiner Swimmingpool lässt sich in $2\frac{1}{2}$ Stunden mit Wasser füllen, der volle Pool lässt sich in 200 Minuten entleeren. Öffnet man das Abflussventil nur 2 Stunden lang, so verbleiben im Swimmingpool noch 2400 Liter Wasser. Man berechne die Wassermenge, die pro Minute durch das Zufluss- bzw. das Abflussrohr fließen. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Pools?

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für den Zufluss $x$, den Abfluss $y$ (jeweils in Litern/Minute) und das Volumen $V$ (in Litern) auf.

**(T 4) Die Urbildfunktion**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung der Menge $X$ in die Menge $Y$. Auf den Potenzmengen wird durch $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ für jede Teilmenge $A$ von $Y$ eine Funktion $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definiert.

(a) Vergleiche die Mengen $f^{-1}(A \cup B)$ und $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für beliebige Teilmengen $A$ und $B$ von $Y$.

(b) Für welche Teilmengen $A$ und $B$ von $Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

(c) Vertauscht die Urbildfunktion mit dem Bilden des Komplements, d.h. gilt $f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$ für jede Teilmenge $A$ von $Y$?

**(T 5)**

Ein Radfahrer fährt von X in das 72 km entfernte Y und wird auf dieser Strecke nach 10 km von einem Auto überholt. Der Autofahrer verbringt 60 Minuten in Y und fährt dann zurück nach X. Dabei trifft er wiederum den Radfahrer, der sich Y inzwischen bis auf 12 km genähert hat. Als der Autofahrer in X eintrifft, ist der Radfahrer bereits seit 20 Minuten in Y. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fuhr der Radfahrer?

Stellen Sie, ausgehend von der Beziehung $t = \frac{s}{v}$, ein lineares Gleichungssystem für $\frac{1}{v_A}$ und $\frac{1}{v_R}$ auf. Dabei bezeichnen $v_A$ und $v_R$ die Geschwindigkeit des Autos bzw. des Radfahrers.