Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

14. Tutorium

(T 1) Skalarprodukte

(a) Zeigen Sie, daß durch $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(B^T A)$ der Raum $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ der reellen $m \times n$-Matrizen mit einem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet wird.

(b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Einheitsmatrix E_2 und der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(T 2) Skalarprodukte

Erklären Sie Ihrem Tutoriumsleiter die geometrische Bedeutung des Standard-Skalarproduktes im $\mathbb{R}^3$.

(T 3) Direkte Summen/Eigenräume

Es sei $A : V \to V$ eine diagonalisierbare $\mathbb{K}$-lineare Selbstabbildung des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Beweisen Sie, daß die Summe der eigenräume

$$\sum_{\lambda\,\mathrm{istEigenwertvonA}} \mathrm{Eig}(A, \lambda)$$

direkt ist und daß $V = \oplus_\lambda \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ gilt.

(T 4) Eigenwerte

Erklären Sie Ihrem Tutoriumsleiter die Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung, deren Darstellungsmatrix diagonalisierbar ist.

(T 5) Sesquilinearformen

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiterhin sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung A^* (,d.h. es gilt $\langle A(v), w\rangle = \langle v, A^*(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$). Beweisen Sie Ker $A = (\mathrm{Im}\ A^*)^\perp$ und Im $A = (\mathrm{Ker}\ A^*)^\perp$.

(T 6) Diagonalisierbarkeit

Es seien $A, B : V \to V$ diagonalisierbare $\mathbb{K}$-lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

(a) Ist $A \circ B$ diagonalisierbar

(b) Ist $A \circ B$ im Falle $A \circ B = B \circ A$ diagonalisierbar?