Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 22.01.08

Lineare Algebra I

13. Tutorium

(T 1)

Berechnen Sie charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots & & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Welche Polynome treten als charakteristisches Polynom einer Matrix auf?

(T 2) Der Grad eines Polynoms

Wir betrachten die Polynome mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$. Der *Grad* eines solchen Polynoms $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ ist definiert durch:

$$\mathrm{Grad}(P) := \begin{cases} \max\{\, k \mid \alpha_k \neq 0 \,\} & \text{, falls } P \neq 0 \\ -\infty & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle Polynome P, Q gilt:

$$\mathrm{Grad}(P+Q) \leq \max\{\, \mathrm{Grad}(P), \mathrm{Grad}(Q) \,\} ,$$
$$\mathrm{Grad}(P \cdot Q) = \mathrm{Grad}(P) + \mathrm{Grad}(Q) .$$

(T 3) Abspalten von Nullstellen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $P \neq 0$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$. Sei weiter $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von P. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom Q gibt, mit

(a) $P(x) = (x - \lambda) \cdot Q(x)$,

(b) $\mathrm{Grad}(P) = \mathrm{Grad}(Q) + 1$.

Sie können beim Beweis wie in Aufgabe (T3) im 3. Tutorium vorgehen und zuerst $\lambda = 0$ betrachten.

(T 4) Formale Polynome

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ die Menge der Folgen $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, bei denen nur endlich viele Folgenglieder von Null verschieden sind, d.h.

$$\mathcal{F}_{\text{fin}} = \{\, (\alpha_k)_k \mid \exists N_0 \in \mathbb{N}.\forall k \geq N. \quad \alpha_k = 0 \,\} \ .$$

(a) Definieren Sie auf $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ einen Addition und Skalarmultiplikation mit Skalarkörper $\mathbb{K}$, die $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ zu einem Vektorraum macht.

(b) Jede Folge $(\alpha_k)_k \in \mathcal{F}_{\text{fin}}$ lässt sich als sog. *formales Polynom* $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ auffassen. (Man beachte, dass nur endlich viele α_k von Null verschieden sind.)
Wie würden Sie zwei solcher formalen Polynome $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k x^k$ multiplizieren? Definieren Sie eine Abbildung

$$* : \mathcal{F}_{\text{fin}} \times \mathcal{F}_{\text{fin}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{fin}}$$

welche dieser Polynom-Multiplikation entspricht. Die hier definierte Operation heißt auch *Faltungsprodukt*.

Wir schreiben im Folgenden für den Vektorraum $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ mit der definierten Multiplikation $\mathbb{K}[x]$ und nennen ihn den *Raum der formalen Polynome mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$.

(T 5) Formale Polynome vs. Polynomfunktionen

Für einen Körper $\mathbb{K}$ betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ der (formalen) Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ wie in Aufgabe T4 und den Vektorraum $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ aller Funktionen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

(a) Jedem formalem Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ in $\mathbb{K}[x]$ lässt sich seine Polynomfunktion

$$f_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad f_P(a) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$$

zuordnen. Wir bezeichnen mit $\Phi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ die Abbildung, die jedem Polynom $P \in \mathbb{K}[x]$ seine Polynomfunktion $f_P \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ linear ist.

(b) Sei speziell $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ der endlicher Körper mit p Elementen. Finden Sie zwei Polynome $P, Q \in \mathbb{F}_p[x]$ mit gleicher Polynomfunktion.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Vandermonde-Determinante (Aufgabe G5 der 9. Übung), dass ein Körper $\mathbb{K}$ genau dann unendlich ist, wenn es keine zwei Polynome mit gleicher Polynomfunktion gibt.