Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08 08.01.08

Lineare Algebra I

11. Tutorium

(T 1) Dimensionsformel für Teilräume

Seien $U, W \subseteq V$ endlich-dimensionale lineare Teilräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) \; .$$

Hinweis:

(a) Ein möglicher Ansatz besteht darin, geeignete Basen in den entsprechenden Räumen zu wählen.

(b) Ein weitere möglicher Ansatz besteht darin, die Abbildung $U \times W \to V,\ (u, w) \mapsto u+w$ und deren Kern bzw. Bild zu betrachten.

(T 2) Polynome von Matrizen

In Polynome mit reellen Koeffizienten lassen sich nicht nur reelle Zahlen, sondern auch Matrizen einsetzen. Für ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ definieren wir

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, A^k \; ,$$

wobei wir $A^0 := E_n$ setzen.

(a) Bestimmen Sie für das Polynom $p = x^2$ die Matrizen $p(A), p(B)$ und $p(C)$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $p(B)$ für ein beliebiges Polynom $p \in \mathcal{P}$.

(c) Wie sieht $p(D)$ für eine Diagonalmatrix D aus?

(T 3) Ausflug

Zeige, dass es für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Polynom $p \in \mathcal{P}$ gibt mit $p(A) = 0_{n \times n}$.

(T 4) Eigenschaften

(a) Zeige, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$p(S\,A\,S^{-1}) = S\,p(A)\,S^{-1} \; .$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p, q \in \mathcal{P}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(p + q)(A) = p(A) + q(A) \; ,$$
$$(\lambda p)(A) = \lambda p(A) \; ,$$
$$(p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A) \; .$$

(T 5) Funktionen von Matrizen

Für viele Zwecke ist es nützlich, auch für andere reellwertige Funktionen f eine Matrix $f(A)$ bilden zu können.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wie würden Sie $f(D)$ für eine Diagonalmatrix D definieren? Wie würden Sie $f(S\,D\,S^{-1})$ für $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ definieren?

(b) Wie und wann lässt sich auf sinnvolle Weise $f(A)$ für die Funktion $f(x) := 1/x$ definieren?

(c) Wie und wannn lässt sich auf sinnvolle Weise $f_\lambda(A)$ für die Funktion $f_\lambda(x) := 1/(x-\lambda)$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden?

(d*) Wie und wann lässt sich sich $\exp(A)$ für die Exponentialfunktion $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ definieren?