Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

Lineare Algebra I

11. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Dimensionsformel für Teilräume

Seien $U, W \subseteq V$ endlich-dimensionale lineare Teilräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) .$$

Hinweis:

(a) Ein möglicher Ansatz besteht darin, geeignete Basen in den entsprechenden Räumen zu wählen.

(b) Ein weitere möglicher Ansatz besteht darin, die Abbildung $U \times W \to V,\ (u, w) \mapsto u+w$ und deren Kern bzw. Bild zu betrachten.

LÖSUNG: (a) zum ersten Ansatz

Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}_{U\cap W} := (b_1, \ldots, b_k)$ von $U \cap V$ und setzen diese zu einer Basis $\mathcal{B}_U := (b_1, \ldots, b_k, u_1, \ldots, u_n)$ von U und einer Basis $\mathcal{B}_W := (b_1, \ldots b_k, w_1, \ldots, w_m)$ von W fort. Wir wollen zeigen, dass dann $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_k, u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von $U + V$ bildet, denn dann gilt

$$\dim U + \dim W = (k + n) + (k + m) = (k + n + m) + k = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) .$$

Alle Vektoren von $\mathcal{B}$ liegen in $U + W$ und mit ihnen lässt sich jeder Vektor in U und jeder Vektor in W als Linearkombination darstellen, weil $\mathcal{B}_U$ bzw. $\mathcal{B}_W$ Basen von U bzw. W sind. Die Vektoren in $\mathcal{B}$ erzeugen somit ganz $U + W$.

Wir müssen deshalb nur noch zeigen, dass die Vektoren in $\mathcal{B}$ linear unabhängig sind. Seien hierzu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbb{K}$ Skalare mit

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \nu_i w_i .$$

Der Vektor $x := \sum_i \lambda_i b_i + \sum_i \mu_i u_i$ liegt als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}_U$ im Teilraum U und wegen

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i = -\sum_{i=1}^{m} \nu_i w_i$$

auch im linearen Teilraum W, d.h. $x \in U \cap V$. Weil $\mathcal{B}_{U\cap W}$ eine Basis von $U \cap W$ ist, gibt es somit Skalare $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$. Es folgt

$$0 = x + \sum_{i=1}^{m} \nu_i w_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{m} \nu_i w_i .$$

Weil aber $\mathcal{B}_W$ eine Basis von W ist, folgt aus der linear Unabhängigkeit der Vektoren, dass alle Koeffizienten verschwinden. Insbesondere gilt also $\nu_1 = \cdots = \nu_m = 0$. Daraus ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i \ .$$

Weil aber auch die Vektoren aus $\mathcal{B}_U$ linear unabhängig sind, folgt daraus, dass auch die Koeffizienten λ_i und μ_i verschwinden, d.h. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.

(b) zum zweiten Ansatz
Wir betrachten die Abbildung $\phi : U \times W \to V,\ \phi(u, w) := u + w$. In Aufgabe G3 der 8. Übung haben wir $\dim(U \times V) = \dim U + \dim V$ gezeigt. Aus der Rangformel ergibt sich deshalb

$$\dim U + \dim V = \dim(\ker \phi) + \dim(\operatorname{im} \phi) \ .$$

Als Bild von ϕ ergibt sich genau $\operatorname{im} \phi = U + W$. Wir brauchen also nur $\dim \ker \phi = U \cap W$ zeigen.

Für jeden Vektor $(u, w) \in U \times W$ gilt

$$\begin{aligned} (u, w) \in \ker \phi \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 = \phi(u, w) = u + w \\ &\Longleftrightarrow \qquad (u, w) = (u, -u) \quad \text{und} \quad u \in W \ . \end{aligned}$$

Es gilt also $\ker \phi = \{ (v, -v) \mid v \in U \cap W \}$. Dieser Teilraum ist isomorph zu $U \cap W$ mit dem Isomorphismus $U \cap W \to \ker \phi, v \mapsto (v, -v)$. Insbesondere gilt also $\dim(\ker \phi) = \dim(U \cap W)$.

(T 2) Polynome von Matrizen

In Polynome mit reellen Koeffizienten lassen sich nicht nur reelle Zahlen, sondern auch Matrizen einsetzen. Für ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ definieren wir

$$p(A) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, A^k \ ,$$

wobei wir $A^0 := E_n$ setzen.

(a) Bestimmen Sie für das Polynom $p = x^2$ die Matrizen $p(A), p(B)$ und $p(C)$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie $p(B)$ für ein beliebiges Polynom $p \in \mathcal{P}$.

(c) Wie sieht $p(D)$ für eine Diagonalmatrix D aus?

LÖSUNG: (a)

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ , \\ p(B) &= B^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ , \\ p(C) &= C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

(b)

$$p(C) = \begin{pmatrix} p(1) & 0 & 0 \\ 0 & p(2) & 0 \\ 0 & 0 & p(2) \end{pmatrix}$$

(c)

$$D =: \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & \\ & p(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

(T 3) Ausflug

Zeige, dass es für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Polynom $p \in \mathcal{P}$ gibt mit $p(A) = 0_{n\times n}$.

LÖSUNG: Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist endlich dimensional mit Dimension n^2. Die Vektoren $E_n = A^0, A^1, \dots, A^{n^2}$ können deshalb nicht linear unabhängig sein. Es gibt somit Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k A^k \ .$$

(T 4) Eigenschaften

(a) Zeige, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gilt:

$$p(S\,A\,S^{-1}) = S\,p(A)\,S^{-1} \ .$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p, q \in \mathcal{P}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (p+q)(A) &= p(A) + q(A) \ , \\ (\lambda p)(A) &= \lambda p(A) \ , \\ (p\cdot q)(A) &= p(A)\cdot q(A) \ . \end{aligned}$$

LÖSUNG: (a) Sei $p =: \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(SAS^{-1}) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (SAS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \underbrace{(SAS^{-1})\dots(SAS^{-1})}_{k \text{ mal}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k SA(S^{-1}S)A(S^{-1}S)\dots AS^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k SA^kS^{-1} \\ &= S\Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k\Big)S^{-1} = Sp(A)S^{-1} \ . \end{aligned}$$

(b) Seien $p =: \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ und $q =: \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k$. (Warum können wir o.B.d.A. für p und q die gleiche Anzahl an Summanden annehmen?) Dann gilt

$$\begin{aligned} (p+q)(A) &= \Big(\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + \beta_k)x^k\Big)(A) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + \beta_k)A^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k + \sum_{k=0}^{n} \beta_k A^k \\ &= p(A) + q(A) \ , \\ (\lambda p)(A) &= \Big(\sum_{k=0}^{n} (\lambda\alpha_k)x^k\Big)(A) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda\alpha_k)A^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = \lambda p(A) \ , \\ (p\cdot q)(A) &= \Big(\sum_{i,j=0}^{n} \alpha_i\beta_j x^{i+j}\Big)(A) = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_i\beta_j A^{i+j} = \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{n} \beta_j A^j\Big) \\ &= p(A)\cdot q(A) \ . \end{aligned}$$

(T 5) Funktionen von Matrizen

Für viele Zwecke ist es nützlich, auch für andere reellwertige Funktionen f eine Matrix $f(A)$ bilden zu können.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wie würden Sie $f(D)$ für eine Diagonalmatrix D definieren? Wie würden Sie $f(S\,D\,S^{-1})$ für $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ definieren?

(b) Wie und wann lässt sich auf sinnvolle Weise $f(A)$ für die Funktion $f(x) := 1/x$ definieren?

(c) Wie und wannn lässt sich auf sinnvolle Weise $f_\lambda(A)$ für die Funktion $f_\lambda(x) := 1/(x-\lambda)$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden?

(d*) Wie und wann lässt sich sich $\exp(A)$ für die Exponentialfunktion $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ definieren?

LÖSUNG: (a) Für eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ setzen wir

$$f(D) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} .$$

Die Matrix SDS^{-1} ensteht aus D durch Basistransformation. Analog zu den Polynomen setzen wir deshalb $f(S\,DS^{-1}) := S\,f(D)\,S^{-1}$.

(b) Ist A invertierbar, so können wir $f(A) := A^{-1}$ setzen.

(c) Wie zuvor, können wir $f_\lambda(A) := (A - \lambda E)^{-1}$ setzen, falls $A - \lambda E$ invertierbar ist, d.h. falls λ kein Eigenwert von A ist.

(d) $\exp(A)$ lässt sich für **jede** Matrix bilden. Wie und warum?