Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

10. Tutorium

(T 1) Determinanten

Berechnen Sie für jede reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

1. durch Spalten- und Zeilenumformungen.
2. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.
3. mit der Regel von Sarrus (falls möglich).

(T 2) Die Spur

Die *Spur* $\mathrm{tr}A$ einer $n \times n$-Matrix A ist die Summe $\sum a_{ii}$ aller Diagonalelemente.

(a) Zeigen Sie $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ für alle $n \times n$-Matrizen A und B.

(b) Beweisen Sie, daß sich die Spur einer Matrix unter Ähnlichkeitstransformationen nicht ändert.

(c) Es sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung des n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß die Spur einer Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ unabhängig von der gewählten Basis $\mathcal{B}$ ist.

(T 3)

Welche der folgenden Aussagen ist für beliebige $n \times n$-Matrizen A und B wahr?

(a) $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A + B)$ (b) $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB)$ (c) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$

(T 4)

Bestimen Sie die Spur folgender linearen Abbildungen:

(a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$

(b) Der Orthogonalspiegelung an der Winkelhalbierenden im 1. und 3. Quadranten.

(c) Einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ im Uhrzeigersinn um den Winkel $\frac{7\pi}{e}$.

(d) Einer Spiegelung des $\mathbb{R}^n$ an einer Hyperebene.

(T 5) $GL(2, \mathbb{F}_p)$

Wir betrachten die Menge $GL(n, \mathbb{F}_p$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

(a) Zeigen Sie, daß $GL(n, \mathbb{F}_p)$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(b) Welche Ordnung (d.h. wieviele Elemente) hat die Gruppe $GL(n, \mathbb{F}_p)$?