Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I

10. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1) Determinanten

Berechnen Sie für jede reelle Zahl $b \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

1. durch Spalten- und Zeilenumformungen.
2. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile.
3. mit der Regel von Sarrus (falls möglich).

LÖSUNG:

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A) = 0$, da die erste und die zweite Zeile identisch sind

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b & 0 & 0 & 1+b \\ 0 & 1+b & 1+b & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1+b & 1 & 0 \\ 0 & 1+b & b & 0 \\ 1+b & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

Das gilt nach Satz 11.1 d) und die nächste Umformung nach Satz 11.1 b):

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert:

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix}$$

Nochmal nach der ersten Spalte entwickeln:

$$= (1+b)^2 \begin{vmatrix} b-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{vmatrix} = (1+b)^2(b-1)^2$$

2.
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot 4 + 2 \cdot (2-1) - 3 \cdot (-2) = -8 + 2 + 6 = 0$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}$$
$$= b^2(b^2-1) - (b^2-1) = (b^2-1)^2 = ((b+1)(b-1))^2 = (1+b)^2(1-b)^2$$

3. Mit der Regel von Sarrus ist nur die Berechnung von det(A) möglich:
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 6 - 2 - 8 = 0$$

(T 2) Die Spur

Die *Spur* $\mathrm{tr}A$ einer $n \times n$-Matrix A ist die Summe $\sum a_{ii}$ aller Diagonalelemente.

(a) Zeigen Sie $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ für alle $n \times n$-Matrizen A und B.

(b) Beweisen Sie, daß sich die Spur einer Matrix unter Ähnlichkeitstransformationen nicht ändert.

(c) Es sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung des n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie, daß die Spur einer Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ unabhängig von der gewählten Basis $\mathcal{B}$ ist.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Damit folgt
$$\mathrm{tr}AB = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik}b_{ki} = \sum_k \sum_i a_{ik}b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki}a_{ik} = \sum_k (BA)_{kk} = \mathrm{tr}BA.$$

(b) Nach Aufgabenteil a) gilt $\mathrm{tr}SAS^{-1} = \mathrm{tr}S(AS^{-1}) = SS^{-1}A = A$ für alle $n \times n$-Matrizen A und invertierbaren $n \times n$-Matrizen S, d.h. die Spur ändert sich nicht unter Ähnlichkeitstransformationen.

(c) Ein Basiswechsel hat eine Ähnlichkeitstransformation der Darstellungsmatrix zur Folge. Somit ergibt sich die Behauptung aus Aufgabenteil b).

(T 3)

Welche der folgenden Aussagen ist für beliebige $n \times n$-Matrizen A und B wahr?

(a) $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A+B)$ (b) $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB)$ (c) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$

(T 4)

Bestimen Sie die Spur folgender linearen Abbildungen:

(a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$

(b) Der Orthogonalspiegelung an der Winkelhalbierenden im 1. und 3. Quadranten.

(c) Einer Drehung im $\mathbb{R}^2$ im Uhrzeigersinn um den Winkel $\frac{7\pi}{e}$.

(d) Einer Spiegelung des $\mathbb{R}^n$ an einer Hyperebene.

LÖSUNG:

(a) $-n$

(b) 0

(c) $2\cos\frac{7\pi}{e}$

(d) $n-2$

(T 5) $GL(2, \mathbb{F}_p)$

Wir betrachten die Menge $GL(n, \mathbb{F}_p$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

(a) Zeigen Sie, daß $GL(n, \mathbb{F}_p)$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(b) Welche Ordnung (d.h. wieviele Elemente) hat die Gruppe $GL(n, \mathbb{F}_p)$?

LÖSUNG:

(a) Die Menge $GL(n, \mathbb{F}_p)$ besteht aus genau den 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_p$, deren Determinante nicht verschwindet.

1. Es seien $A, B \in GL(n, \mathbb{F}_p)$ zwei Matrizen mit Determinante ungleich Null. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß für beliebige quadratische Matrizen A und B die Determinante $\det AB$ des Produktes das Produkt $\det A \det B$ ist. Folglich ist auch die Determinate $\det AB$ des Produktes AB ungleich 0, d.h. $AB \in GL(n, \mathbb{F}_p)$. Die Menge $GL(n, \mathbb{F}_p)$ ist somit unter der Matrixmultiplikation abgeschlossen.
2. Die Determinate der Einheitsmatrix E ist 1, somit hat $GL(n, \mathbb{F}_p)$ ein neutrales Element.
3. Da der Gaußalgorithmus über beliebigen Körpern funktioniert, läßt sich jedes Element in $GL(n, \mathbb{F}_p)$ invertieren.
4. Die Assoziativität der Multiplikation ist bekannt, somit ist $(GL(n, \mathbb{F}_p), E, \cdot)$ eine Gruppe.

(b) Da die erste Spalte einer Matrix in $GL(n, \mathbb{F}_p)$ nicht der Nullvektor sein kann (sonst wäre die Determinante 0), gibt es für diese $p^2 - 1$ Möglichkeiten. Die Zweite Spalte darf nun kein Vielfaches der ersten Spalte sein (dies sind p Stück). Somit verbleiben hierfür $p^2 - p$ Möglichkeiten. Insgesamt sind dies $(p^2-1)(p^2-p) = (p-1)^2(p+1)p$ Möglichkeiten.