Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 16.10.2007

Lineare Algebra I

1. Tutorium

Die Mengenlehre ist in der Mathematik von grundlegender Bedeutung. Nahezu alle mathematikschen Objekte können durch Mengen definiert werden. Eine erste Definition des Begriffs der Menge geht auf G. Cantor zurück:

Definition 1. Eine *Menge* M ist die Zusammenfassung bestimmter wohl unterscheidbarer Objekte a unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Die zur Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente*. Gehört Objekt a zur Menge M, so schreibt man $a \in M$. Gehört Objekt a nicht zur Menge M, so schreibt man $a \notin M$. Mengen werden i.d.R. durch Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern oder durch Angabe einer Bildungsvorschrift dargestellt.

Beispiel 1.

1. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
2. {Tarzan, Karl, Klößchen, Gabi}
3. die Menge der Studenten in Darmstadt $M = \{x \,;\, x \text{ studiert in Darmstadt}\}$
4. die Menge der Primzahlen $\{p \in \mathbb{N} \,;\, p \text{ ist prim}\}$
5. die leere Menge $\emptyset = \{\,\}$

Zwei Mengen X, Y sind *gleich* und wir schreiben $X = Y$, falls sie dieselben Elemente enthalten. Insbesondere kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der die Elemente angegeben werden. Eine Menge X heißt *Teilmenge* einer Menge Y und wir schreiben $X \subseteq Y$, falls jedes Element von X auch in Y enthalten ist. Aus zwei Mengen X, Y lassen sich durch verschiedene Operationen neue Mengen konstruieren:

$$\begin{aligned}
X \cup Y &:= \{x \,;\, x \in X \text{ oder } x \in Y\} && \text{Vereinigung}\\
X \cap Y &:= \{x \,;\, x \in X \text{ und } x \in Y\} && \text{Schnitt}\\
X \setminus Y &:= \{x \,;\, x \in X \text{ und } x \notin Y\} && \text{Differenz}\\
X \times Y &:= \{(x, y) \,;\, x \in X \text{ und } y \in Y\} && \text{kartesisches Produkt}
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet (x, y) das geordnete Paar aus x und y, d.h insbesondere gilt $(x, y) \neq (y, x)$ für alle $x \neq y$. Für das Rechnen mit Mengen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetze:	$X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X$
Assoziativgesetze:	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z, \qquad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
Absoptionsgesetze:	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap (X \cap Z)$
Distributivgesetze:	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
Gesetze von de Morgan:	$Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y)$, $Z \setminus (X \cap Y) = (Z \setminus X) \cup (Z \setminus Y)$

(T 1)

(a) Überzeuge dich mit einer geeigneten grafischen Veranschaulichung, dass die Kommutativgesetze, die Assoziativgesetze, die Absorptionsgesetze und die Distributivgesetze wahr sind.

(b) Beweise eines der de Morganschen Gesetze.

(T 2)

Was ist der Unterschied zwischen den folgenden Mengen? Begründe deine Entscheidung.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\,, \qquad \{(y,x)\ ;\ x,y \in \mathbb{Z}\}\,,$$
$$\{(-x-5, y+42)\ ;\ x \in \mathbb{Z} \text{ und } y \in \mathbb{Z}\}\,, \quad \{(x, x-y)\ ;\ x \in \mathbb{Z} \text{ und } y \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Neben dem Begriff der Menge spielt in fast allen Gebieten der Mathematik auch der Begriff der *Funktion* eine zentrale Rolle. (In vielen Fällen werden Funktionen auch *Abbildungen* genannt.) Wir geben hier zwei Definitionen für den Begriff der Funktion: eine intuitive Definition, die ihr vielleicht in ähnlicher Form aus der Schule kennt, und eine formale Definition:

Definition 2 (intuitiv). Eine *Funktion* besteht aus drei Dingen: einer Menge X, dem *Definitionsbereich*, einer Menge Y, dem *Wertebereich*, und einer Vorschrift, nach welcher jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zugeordnet wird.

Definition 3 (formal). Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* f von X nach Y ist eine Teilmenge $f \subseteq X \times Y$, so dass es für jedes Element $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$ gibt.

Für eine solche Funktion schreiben wir $f : X \to Y$. Gilt $(x,y) \in f$, so schreiben wir auch $y = f(x)$ und sagen, dass y *der (Funktions-)Wert von* f *an der Stelle* x ist.

(T 3)

(a) Vergleiche die beiden Definitionen. Definieren sie wirklich den selben Begriff?

(b) Finde ca. 5 verschiedene Beispiele für Funktionen (z.B aus der Schule oder aus deinem Alltag).

(T 4) Verknüpfung von Funktionen

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige, dass dann auch

$$g \circ f := \{(x,z) \in X \times Z\ ;\ \exists y \in Y :\ (x,y) \in f\ \wedge\ (y,z) \in g\}$$

eine Funktion $g \circ f : X \to Z$ ist und dass $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$ gilt.

Definition 4. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

1. *surjektiv*, falls gilt $\forall y \in Y : \exists x \in X :\ y = f(x)$.
2. *injektiv*, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X :\ f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$.
3. *bijektiv*, falls es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ gibt.

(T 5)

(a) Formuliere in deinen eigenen Worten, wann genau eine Funktion surjektiv bzw. injektiv ist.

(b) Welche deiner Beispiel aus Aufgabe T3b sind surjektiv bzw. injektiv?

(c) Zeige, dass für eine Funktion $f : X \to Y$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    1. f ist bijektiv.
    2. f ist surjektiv und injektiv.
    3. Es gibt eine Funktion $g : Y \to X$, so dass für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt

$$x = (g \circ f)(x) \qquad\qquad y = (f \circ g)(y)$$