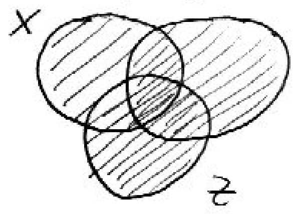
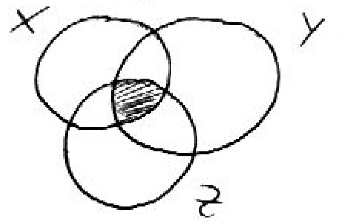
Lösungshinweise zum 1. Tutorium

16. Oktober 2007

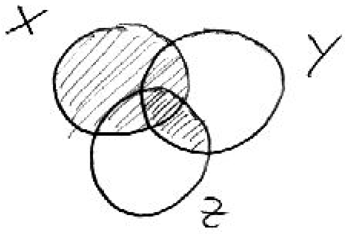
(T1) (a) Eine Möglichkeit zur Veranschaulichung sind die sog. Euler-Venn-Diagramme

für $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$: $\qquad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$





für $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$



(b) Wir zeigen nur $Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y)$. Der Beweis der anderen Regel verläuft analog:

$$
\begin{aligned}
Z \setminus (X \cup Y) &= \{a \,;\, a \in Z \text{ und } a \notin X \cup Y\} = \\
&= \{a \,;\, a \in Z \text{ und } a \notin X \text{ und } a \notin Y\} = \\
&= \{a \,;\, (a \in Z \text{ und } a \notin X) \text{ und } (\cancel{a \notin Z}\; a \in Z \text{ und } a \notin Y)\} = \\
&= \{a \,;\, a \in Z \text{ und } a \notin X\} \cap \{a \,;\, a \in Z \text{ und } a \notin Y\} \\
&= (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y)
\end{aligned}
$$

(T2) Zwischen den Mengen besteht kein Unterschied, weil sie dieselben Elemente enthalten.

a) Bei den Mengen $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ und $\{(y,x) \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ ist dies offensichtlich.

b) Jedes Element $(-x-5, y+42)$ mit $x,y\in\mathbb{Z}$ ist ein Paar von ganzen Zahlen, liegt also in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Somit gilt

$$\{(-x-5, y+42) \mid x,y\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Umgekehrt gilt für jedes Element $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$(x,y) = (-(x-5)-5, (y-42)+42)$$

und somit

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq \{(-x-5, y+42) \mid x,y\in\mathbb{Z}\} \quad (2)$$

Aus den beiden Inklusionen (1) und (2) folgt dann

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(-x-5, y+42) \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$$

c) Wie bei b) folgt auch

$$\{(x, x-y) \mid x,y\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad (3)$$

Umgekehrt gilt für jedes Element $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$(x,y) = (x, x-(x-y)) \in \{(x', x'-y') \mid x',y'\in\mathbb{Z}\}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq \{(x, x-y) \mid x,y\in\mathbb{Z}\} \quad (4)$$

Die beiden Inklusion (3) und (4) ergeben dann

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \{(x, x-y) \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$$

(T3) (a) Die Definitionen sollen denselben Begriff definieren. Allerdings ist bei Definition 2 unklar, was genau unter einer Vorschrift zu verstehen ist.

(b) ... z. B.

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$

$f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) := 2x$

$f_3: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) := 0$

$f_4: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(x) := |x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$

$f_5: X \to X, \quad f(x) := x$

(T4) Sei $x \in X$

a) Wir zeigen zuerst, dass es ein $z \in Z$ gibt mit $(x, z) \in g \circ f$:
Weil f eine Funktion ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.
Weil g eine Funktion ist, gibt es ein $z \in Z$ mit $(y, z) \in g$.
Nach Def. von $g \circ f$ gilt dann $(x, z) \in g \circ f$.

b) Wir zeigen jetzt, dass es genau ein $z \in Z$ mit $(x, z) \in g \circ f$ gibt. Hierfür seien $z_1, z_2 \in Z$ mit $(x, z_1), (x, z_2) \in g \circ f$.
Wir wollen zeigen, dass dann $z_1 = z_2$ gelten muss:
Nach Def. von $g \circ f$ gibt es $y_1, y_2 \in Y$ mit

$(x, y_1) \in f$ und $(y_1, z_1) \in g$,
$(x, y_2) \in f$ und $(y_2, z_2) \in g$.

Weil f eine Funktion ist, muss dann $y_1 = y_2$ gelten, und weil g eine Funktion ist, folgt daraus auch $z_1 = z_2$.

c) Ist $z = (g \circ f)(x)$, so gibt es nach Def. ein $y \in Y$ mit

$y = f(x)$ und $z = g(y)$

$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x))$

(T5) (a) z. B.

f ist genau dann surjektiv, falls jedes Element $y \in Y$ als Funktionswert angenommen wird.

f ist genau dann injektiv, wenn kein Funktionswert mehrmals angenommen wird.

(b) f_1 ist weder injektiv noch surjektiv.
f_2 ist injektiv, aber nicht surjektiv.
f_3 ist weder injektiv noch surjektiv.
f_4 ist surjektiv aber nicht injektiv.
f_5 ist injektiv und surjektiv.

(c) $1 \Rightarrow 2$/ ~~Sei~~ Sei f bijektiv

i) z.z.: f surjektiv
Sei $y \in Y$. Weil f bijektiv ist, gibt es (genau) ein $x \in X$ mit $y = f(x)$.

ii) z.z.: f injektiv
Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Weil f bijektiv ist, gibt es für $y := f(x_1) = f(x_2)$ <u>genau</u> ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Es muss also $x_1 = x_2$ gelten.

$2 \Rightarrow 3$/ Sei f injektiv und surjektiv. Wir definieren

$$g := \{(y, x) \in Y \times X \mid y = f(x)\}$$

und wollen zeigen, dass g eine Funktion ist

i) Sei $y \in Y$. Weil f surjektiv ist, gibt es dann ein $x \in X$ mit $y = f(x)$, also $(y, x) \in g$.

ii) Sei $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $(y, x_1), (y, x_2) \in g$.
Nach Def. von g gilt dann $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Weil f injektiv ist, folgt daraus $x_1 = x_2$.

Aus i) und ii) folgt dann, dass g eine Funktion ist.

$x = (g \circ f)(x)$/ Sei $x \in X$. Setze $y := f(x)$. Dann gilt nach Def. von g auch $x = g(y)$ und somit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$$

$y = (f \circ g)(y)$ zeigt man analog.

$3 \Rightarrow 1$ / Sei $y \in Y$.

i) Wir setzen $x := g(y)$. Dann gilt

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$$

ii) Sei $x' \in X$ ein weiteres Element mit $y = f(x')$. Dann gilt

$$x' = (g \circ f)(x') = g(f(x')) = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$$

Es gibt also genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$.