Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 9.10.2007

Lineare Algebra I
Tutorium

(T 1)

Für zwei ganze Zahlen a, c schreiben wir $a|c$, falls a die Zahl c teilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Machen Sie sich dabei bewußt, was genau zu tun ist, um eine Aussage zu beweisen bzw. zu widerlegen.

(a) Gilt $a|b$ und $b|c$, so folgt $a|d$.

(b) Gilt $a|b$ und $b|a$, so folgt $a = b$ oder $a = -b$.

(c) Gilt $a|b$ und $a|c$, so gilt auch $a|(b+c)$ und $a|(b-c)$.

(d) Gilt $a|c$ und $b|c$, so folgt $(a+b)|c$.

(e) Gilt $a|b$, so gilt für jede Zahl c auch $a|b \cdot c$.

(f) Gilt $a|c$ und $b|c$, so gilt auch $(a \cdot b)|c$.

(T 2)

Schreiben Sie die Aussagen aus Aufgabe T1 mit Hilfe des Quantors $\forall$ (Für alle), des Zeichens $\wedge$ für "und", des Zeichens $\vee$ für "oder" und mit Hilfe des Implikationspfeils $\Rightarrow$. Die Aussage aus Aufgabe T1 a) läßt sich z.B. durch "$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$" kurz schreiben.

(T 3) Kongruenzklassen

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir nennen zwei Zahlen a, b *kongruent modulo n*, falls die ganze Zahl $a - b$ durch n teilbar ist. Wir schreiben in diesem Fall $a \equiv b \pmod{n}$.

(a) Für welche Zahlen a gilt $a \equiv 0 \pmod{2}$, für welche gilt $a \equiv 1 \pmod{2}$?

(b) Zeige, daß $a \equiv 0 \pmod{n}$ genau dann gilt, wenn $n|a$ gilt.

Hinweis: Die Satzkonstruktion „genau dann ..., wenn" beinhaltet *zwei* Implikationen.

(c) Zeige, daß $a \equiv b \pmod{n}$ genau dann gilt, wenn a und b denselben Rest bei Division durch n haben. Formuliere hierzu vor dem Beweis genau, was du unter dem Rest bei Division durch n verstehst.

(d) Zeige: Gilt $a \equiv b \pmod{n}$ und $c \equiv d \pmod{n}$, so gilt auch

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n} \qquad \text{und} \qquad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}.$$

(T 4)

(a) Zeige, daß es für jede natürliche Zahl a genau eine Zahl $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit $a \equiv k \pmod{4}$ gibt!

Hinweis: Die Satzkonstruktion „genau eine" ist gleichbedeutend mit „eine und *nur* eine".

(b) Wieviele Primzahlen p gibt es mit $p \equiv 0 \pmod 4$, wieviele mit $p \equiv 2 \pmod 4$?

(c) Gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod 4$? Die folgenden Teilaufgaben können dir vielleicht bei deiner Entscheidung helfen:

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Diskutiere in deiner Gruppe die wesentlichen Schritte des Beweises!
2. Zeige, daß für alle natürlichen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\prod_{i=1}^{n}(4a_i+1) \equiv 1 \pmod 4 ,$$
$$\prod_{i=1}^{n}(4a_i+3) \equiv (-1)^n \pmod 4 .$$

(d) (Für Interessierte) Gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 1 \pmod 4$?