Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bruinier

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08 04. März 2008

Bachelorklausur Lineare Algebra I

für M / Ph.-Bsc.

Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen, fortlaufend numerieren und am Schluß in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
mögl. Punktzahl	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
err. Punktzahl											

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Programmierbare (Taschen)rechner sind nicht zugelassen.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W Vektorräume über K sowie $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Markieren Sie die richtigen Aussagen:

- ☐ Ist f injektiv, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.
- ☐ Ist f injektiv, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.
- ☐ Ist f bijektiv, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.
- ☐ Ist f bijektiv, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\lambda \in K$ und $M_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$.

- ☐ Es gilt $\operatorname{Rang} M_\lambda \leq 1$ für alle $\lambda \in K$.
- ☐ Es gilt $\operatorname{Rang} M_\lambda \geq 1$ für alle $\lambda \in K$.
- ☐ Es gibt ein $\lambda \in K$, so daß $\operatorname{Rang}(M_\lambda) = 0$.
- ☐ Es gibt ein $\lambda \in K$, so daß $\operatorname{Rang}(M_\lambda) = 2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren.

- ☐ Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Es gilt $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
- ☐ Es gilt $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?.

- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.
- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.
- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, welche bezüglich der Standardbasis die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

hat. Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von f.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung des Vektorraumes V und U in f-invarianter Untervektorraum von V (d.h. $f(U) \subset U$). Für die einschränkung von f auf U gelte $f_{midU} = 0$. Beweisen Sie die folgenden Behauptunegn:

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $\operatorname{Rang} f \leq \frac{1}{2} \dim V$.

(b) Zeigen Sie $f \circ f = 0$.

(c) Beweisen Sie, daß die Abbildung $\mathrm{id}_V + f$ invertierbar ist und geben Sie die inverse Abbildung $(\mathrm{id}_V + f)^{-1}$ an.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix mit $a_{ij} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Zahl n ist ein Eigenwert von A.

(b) Die Zahl 0 ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $n \geq 2$ gilt.

(c) Im Falle $n \geq 2$ sind 0 und n die einzigen Eigenwerte von A.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsvorschrift

$$f_0 := 0 \,, \qquad f_1 := 1 \,, \qquad f_{n+2} := f_n + 2f_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir suchen eine explizite Darstellung dieser Zahlen.

1. Berechnen Sie die ersten 5 Folgeglieder $f_1, \ldots, f_5$.
2. Finden Sie eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (Beweis!)

$$F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} ,$$

3. Zeigen Sie, daß F reell diagonalisierbar ist.

1.

n	0	1	2	3	4	5
f_n	0	1	2	5	12	29

2. Wir setzen $F := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Durch vollständige Induktion zeigt man dann leicht, dass diese Matrix auch die gewünschte Bedingung erfüllt:

$$F^0 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) ,$$
$$F^{n+1} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = FF^n \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + 2f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} .$$

3. Als charakteristisches Polynom von F ergibt sich

$$P_F(\lambda) = \det(\lambda E_2 - F) = \lambda(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \,.$$

Die Eigenwerte von F sind somit durch $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ und $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$ gegeben. Da F zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist die Matrix diagonalisierbar.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

(a)

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 7-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 5-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(5-\lambda) + 2(5-\lambda)) + 2 \cdot (-3(5-\lambda) + 3(5-\lambda)) \\
&= (2-\lambda)(5-\lambda)[(2-\lambda) + 2 + 0] \\
&= (5-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda).
\end{aligned}$$

Also ist $P_A(\lambda) = (5-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Zu beachten ist noch, daß der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A + E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A - E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A - 2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n und W ein K-Vektorraum der Dimension m. Weiterhin bezeichne $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

(c) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, falls K der Körper mit zwei Elementen ist.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Es sei $\varphi : Q^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die durch $A \mapsto A + A^T$ gegebene Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der linearen Abbildung φ