Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bruinier

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08 04. März 2008

Lineare Algebra I

für M.-Bsc. /LaGM

Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen, fortlaufend numerieren und am Schluß in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Fachrichtung: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt	Bonus	Note
Erreichbar	8	10	10	10	10	10	10	10	78		
Erreicht											

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Programmierbare (Taschen)rechner sind nicht zugelassen.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Punkt. Jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 und minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Es sei K ein Körper, V und W Vektorräume über K sowie $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung.

- ☐ Ist f injektiv, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.
- ☐ Ist f injektiv, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.
- ☐ Ist f bijektiv, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.
- ☐ Ist f bijektiv, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(b) Es sei $\lambda \in K$ und $M_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$.

- ☐ Es gilt $\operatorname{Rang} M_\lambda \leq 1$ für alle $\lambda \in K$.
- ☐ Es gilt $\operatorname{Rang} M_\lambda \geq 1$ für alle $\lambda \in K$.
- ☐ Es gibt ein $\lambda \in K$, so daß $\operatorname{Rang}(M_\lambda) = 0$.
- ☐ Es gibt ein $\lambda \in K$, so daß $\operatorname{Rang}(M_\lambda) = 2$.

(c) Es seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren.

- ☐ Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Es gilt $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
- ☐ Es gilt $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

(d) Welche der folgenden Matrizen sind über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?.

☐ $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, welche bezüglich der Standardbasis die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

hat. Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von f.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $f : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung des Vektorraumes V und es gelte $f(V) \subset U$. Für die einschränkung von f auf U gelte $f_{|U} = 0$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $\operatorname{Rang} f \leq \frac{1}{2} \dim V$.

(b) Zeigen Sie $f \circ f = 0$.

(c) Beweisen Sie, daß die Abbildung $\mathrm{id}_V + f$ invertierbar ist und geben Sie die inverse Abbildung $(\mathrm{id}_V + f)^{-1}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit $a_{ij} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Zahl n ist ein Eigenwert von A.

(b) Die Zahl 0 ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $n \geq 2$ gilt.

(c) Im Falle $n \geq 2$ sind 0 und n die einzigen Eigenwerte von A.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Rekursionsvorschrift $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_n + 2f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die ersten 5 Folgeglieder $f_1, \ldots, f_5$.

(b) Finden Sie eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (Beweis!):

$$F^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie, daß F reell diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n und W ein K-Vektorraum der Dimension m. Weiterhin bezeichne $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

(c) Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, falls K der Körper mit zwei Elementen ist.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die durch $A \mapsto A + A^T$ gegebene Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der linearen Abbildung φ.

(d) Bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.