Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Der Kern einer linearen Abbildung $\phi : V \to W$ ist

☐ $\phi^{-1}(\{0\})$. ☐ $\phi(\{0\})$. ☐ $\phi(V)$. ☐ $\{v \in V : \phi(v) = 0\}$.

(T 2)

Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?

☐ $\dim(\mathrm{Im}\phi) \le \dim V$ ☐ $\dim(\mathrm{Im}\phi) \le \dim W$ ☐ $\dim(\ker\phi) \le \dim V$ ☐ $\dim(\ker\phi) \le \dim W$

(T 3) Der Vektorraum $¶_n(\mathbb{K})$ der Polynome vom Grad $\le n$ ist isomorph zu

☐ $\mathbb{K}$ ☐ $\mathbb{K}^n$ ☐ $\mathbb{K}^{n-1}$ ☐ $\mathbb{K}^{n+1}$ ☐ $\mathbb{K}^2$ ☐ $¶_n(\mathbb{K})$

(G 1) Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellwertigen Matrizen:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(G 2) Spiegelungen

Es sei g die Gerade durch den Ursprung, die mit der positiven x-Achse im $\mathbb{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn den Winkel $\gamma \in [0, 2\pi]$ einschließt und $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalspiegelung an der Geraden g.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von g.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatix $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\sigma_g)$ zur Abbildung σ_g.

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\sigma_g)$.

(G 3) Determinanten und Basiswechsel

Die lineare Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_3$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det \mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(L)$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ von L bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ und vergleichen Sie sie mit $\det \mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(L)$. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

(G 4) Projektionen

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $\phi \circ \phi = \phi$ gilt. Es sei ϕ eine Projektion.

(a) Zeigen Sie, daß $V = \ker \phi + \mathrm{Im}\phi$ gilt.

(b) Ist die Summe in a) direkt, d.h. gilt: $V = \ker \phi \cap \mathrm{Im}\phi = \{0\}$?

(G 5) Vandermonde-Determinante

Die **Vandermonde Matrix** $V(x_1, \dots, x_n)$ für ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ ist durch

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Vandermonde-Matrizen $V(x_1, x_2)$ und $V(x_1, x_2, x_3)$. Schreiben Sie das Ergebnis als Produkt von Differenzen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Vandermonde-Determinante $\det V(x_1, \dots, x_n)$ auf und beweisen Sie diese.

Hinweis: Erzeugen Sie durch Spaltenoperationen möglichst viele Nullen in der ersten Zeile und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.

(G 6) Matrizen und Determinanten

Es seien beliebige quadratische (komplexwertige) Matrizen A und B gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $AA = I \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow$ AB ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

Hausübungen

(A 14) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(A 15) (10 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist n gerade, so gibt es eine $n \times n$-Matrix A, so dass $A - A^T$ invertierbar ist.

(b) Ist n ungerade, so ist für alle $n \times n$-Matrizen A die Matrix $A - A^T$ nicht invertierbar.

(A 16) Determinanten (10 Punkte)

Für $n \geq 2$ berechne man

$$f(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

(die Matrix sei in $\mathbb{R}^{n \times n}$) und gebe $f(0)$ sowie alle Nullstellen von f an.