Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Der Kern einer linearen Abbildung $\phi : V \to W$ ist

☐ $\phi^{-1}(\{0\})$. ☐ $\phi(\{0\})$. ☐ $\phi(V)$. ☐ $\{v \in V : \phi(v) = 0\}$.

(T 2)

Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?

☐ $\dim(\mathrm{Im}\phi) \le \dim V$ ☐ $\dim(\mathrm{Im}\phi) \le \dim W$ ☐ $\dim(\ker \phi) \le \dim V$
☐ $\dim(\ker \phi) \le \dim W$

(T 3) Der Vektorraum $\P_n(\mathbb{K})$ der Polynome vom Grad $\le n$ ist isomorph zu

☐ $\mathbb{K}$ ☐ $\mathbb{K}^n$ ☐ $\mathbb{K}^{n-1}$ ☐ $\mathbb{K}^{n+1}$ ☐ $\mathbb{K}^2$ ☐ $\P_n(\mathbb{K})$

(G 1) Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellwertigen Matrizen:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(G 2) Spiegelungen

Es sei g die Gerade durch den Ursprung, die mit der positiven x-Achse im $\mathbb{R}^2$ im Gegenuhrzeigersinn den Winkel $\gamma \in [0, 2\pi]$ einschließt und $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Orthogonalspiegelung an der Geraden g.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von g.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatix $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}(\sigma_g)$ zur Abbildung σ_g.

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}(\sigma_g)$.

LÖSUNG:

(a) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} \right\}$ ist z.B. eine Basis für g.

(b) Die Basis aus Aufgabe a) läßt sich durch den Vektor $\binom{-\sin\gamma}{\cos\gamma}$ zu einer Basis $\mathcal{B} = \left\{\binom{\cos\gamma}{\sin\gamma}, \binom{-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right\}$ ergänzen. In dieser Basis wird die Spiegelung durch die Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\sigma_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\sigma_g)$ ergibt sich dadurch zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\sigma_g) &= [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}}[\sigma_g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}^{\mathbb{R}^2}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cos^2\gamma - \sin^2\gamma & 2\cos\gamma\sin\gamma \\ \cos\gamma\sin\gamma & -cos^2\gamma + \sin^2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) \\ \sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus den Additionssätzen für Sinus und Cosinus.

(c) $\det\mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{K}_2}(\sigma_g) = -\cos^2(2\gamma) - \sin^2(2\gamma) = -1$

(G 3) Determinanten und Basiswechsel

Die lineare Funktion $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_3$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L)$

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ von L bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ und vergleichen Sie sie mit $\det\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L)$. Erklären Sie Ihr Ergebnis.

LÖSUNG:

(a) $\det\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L) = 6.$

(b) Der Basiswechsel wird durch die Matrix

$$S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_3}(\sigma^{-1}_{\mathcal{K}_3} \circ \sigma_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

beschrieben. Es folgt $\det\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L) = \det(S^{-1} \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(L) \cdot S)$. Es ist zunächst die Inverse von S zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III-2II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-\frac{1}{2}III \\ II+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = S^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{K}_3}(L) \cdot S &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Die Determinante ähnlicher Matrizen ist gleich.

(G 4) Projektionen

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $\phi \circ \phi = \phi$ gilt. Es sei ϕ eine Projektion.

(a) Zeigen Sie, daß $V = \ker\phi + \mathrm{Im}\phi$ gilt.

(b) Ist die Summe in a) direkt, d.h. gilt: $V = \ker\phi \cap \mathrm{Im}\phi = \{0\}$?

LÖSUNG:

(a) Es sei $v \in V$. Dann liegt $v_1 := v - \phi(v)$ in $\ker\phi$ wegen

$$\phi(v_1) = \phi(v - \phi(v)) = \phi(v) - \phi(\phi(v)) = \phi(v) - \phi(v) = 0.$$

Andererseits ist $v_2 := \phi(v)$ im Bild von ϕ. Wir haben zusammen $v = v_1 + v_2$.

(b) Wir zeigen $\ker\phi \cap \mathrm{Im}\phi = \{0\}$. Angenommen, ein Element $\phi(v)$ aus $\mathrm{Im}\phi$ ist ebenso im Kern. Dann gilt $0 = \phi(\phi(v)) = \phi(v)$.

(G 5) Vandermonde-Determinante

Die **Vandermonde Matrix** $V(x_1, \ldots, x_n)$ für ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ ist durch

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Vandermonde-Matrizen $V(x_1, x_2)$ und $V(x_1, x_2, x_3)$. Schreiben Sie das Ergebnis als Produkt von Differenzen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Vandermonde-Determinante $\det V(x_1, \ldots, x_n)$ auf und beweisen Sie diese.

Hinweis: Erzeugen Sie durch Spaltenoperationen möglichst viele Nullen in der ersten Zeile und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.

LÖSUNG:

(a) $\det V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. $\det V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(b) Wir vermuten $\det V(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i>j}(x_i - x_j)$. Zieht man die erste Zeile von allen weiteren Zeilen ab, so erhält man

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{pmatrix}.$$

Das Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_n x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{pmatrix}.$$

Hier kann man in der k-ten Zeile den Faktor $(x_k - x_1)$ herausziehen und erhält

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i>1}(x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

(G 6) Matrizen und Determinanten

Es seien beliebige quadratische (komplexwertige) Matrizen A und B gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $AA = I \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

LÖSUNG:

(a) *Richtig!*
Beh.: $A^2 = I \Rightarrow \det(A) = \pm 1$
Bew.: Nach Satz 11.1 e) gilt $\det(A^2) = (\det(A))^2$ und nach a) gilt $\det(I) = 1$. Also ist $1 = \det(I) = \det(A^2) = (\det(A))^2$ und damit $\det(A) = \pm 1$.

(b) *Richtig!*
Beh.: A nicht invertierbar $\Rightarrow AB$ nicht invertierbar
Bew.: Da A nicht invertierbar ist, gilt $\det(A) = 0$. Also ist auch $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$ und damit AB nicht invertierbar.

(c) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $\det(A) + \det(B) = 0 + 1 = 1$, aber:

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

(d) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und damit auch $A^3 = 0$, aber $A \neq 0$.

(e) *Richtig!*
Beh.: $A^3 = 0 \Rightarrow (I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
Bew.: Wir müssen zeigen

$$(i)\ (I - A)(I + A + A^2) = I$$
$$(ii)\ (I + A + A^2)(I - A) = I$$

zu (i): $(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3 = I - 0 = I$.
zu (ii): $(I + A + A^2)(I - A) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$.

(f) *Falsch!*
Wähle $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$. Dann hat A nicht-reelle Einträge, aber $\det(A) = -1 \in \mathbb{R}$.

Hausübungen

(A 14) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung: E

s gilt

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$$

und mit Beispiel (4) auf S.46 a.a.O. ergibt sich

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot (-4) + 9 \cdot 7 \cdot 3 - 9 \cdot 5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot 0 \\ &= 0 - 16 + 189 + 180 - 18 - 0 \\ &= 335. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Determinante der Matrix C ist es nach den Bemerkungen (6) und (7) auf S.48 a.a.O. sinnvoll, wenn zunächst die Gestalt der Matrix mittels elementarer Umformungen so verändert wird, daß möglichst viele Elemente einer Zeile (oder Spalte) den Wert Null annehmen:

	3 7 8 9 4 3 1 4 6 8 8 9 0 2 3 7
Z3 + (-1) · Z1	3 7 8 9 4 3 1 4 3 1 0 0 0 2 3 7
S1 + (-3) · S2	- 18 7 8 9 - 5 3 1 4 0 1 0 0 - 6 2 3 7

Die Determinante der Matrix

$$C' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 8 & 9 \\ -\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\ 6 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

stimmt mit der Determinante von C überein. Eine *Entwicklung nach der dritten Zeile* von C' ergibt

$$\det C = \det C' = \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{3+\nu} \cdot \widetilde{C}'_{3\nu} \cdot c'_{3\nu}.$$

Wegen

$$c'_{31} = c'_{33} = c'_{34} = 0 \quad \text{und} \quad c'_{32} = 1 \neq 0$$

erhält man mit dem Minor

$$\begin{aligned} \widetilde{C}'_{32} = \begin{vmatrix} -18 & 8 & 9 \\ -5 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 7 \end{vmatrix} &= (-18) \cdot 1 \cdot 7 + (-5) \cdot 3 \cdot 9 + (-6) \cdot 8 \cdot 4 \\ &\quad - (-6) \cdot 1 \cdot 9 - (-18) \cdot 3 \cdot 4 - (-5) \cdot 8 \cdot 7 \\ &= -126 - 135 - 192 + 54 + 216 + 280 \\ &= 97 \end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned} \det C &= \det C' \\ &= \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{3+\nu} \cdot \widetilde{C}'_{3\nu} \cdot c'_{3\nu} \\ &= (-1)^{3+2} \cdot \widetilde{C}'_{32} \cdot c'_{32} \\ &= (-1)^{5} \cdot 97 \cdot 1 \\ &= -97. \end{aligned}$$

(A 15) (10 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist n gerade, so gibt es eine $n \times n$-Matrix A, so dass $A - A^T$ invertierbar ist.

(b) Ist n ungerade, so ist für alle $n \times n$-Matrizen A die Matrix $A - A^T$ nicht invertierbar.

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen an, n sei gerade. Wir nehmen aus $M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - A^T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A - A^T$ hat die Determinante $1^{\frac{n}{2}} = 1$, ist also invertierbar.

(b) Angenommen, n ist ungerade. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A - A^T) &= \det((A - A^T)^T) = \det(A^T - A) = \det(-(A - A^T)) \\ &= (-1)^n \det(A - A^T) = -\det(A - A^T), \end{aligned}$$

somit $\det(A - A^T) = 0$, was bedeutet, dass $A - A^T$ nicht invertierbar ist.

(A 16) Determinanten (10 Punkte)

Für $n \geq 2$ berechne man

$$f(x) := \det \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix}$$

(die Matrix sei in $\mathbb{R}^{n \times n}$) und gebe $f(0)$ sowie alle Nullstellen von f an.

LÖSUNG:

Zur Berechnung der Determinante wird zunächst die letzte Zeile von jeder Zeile subtrahiert, anschließend werden alle Spalten zur letzte Spalte addiert. Man erhält:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-x \\ 0 & x-1 & \dots & 0 & 0 & 1-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & x+(n-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, ergibt sich die Determinante als Produkt der Hauptdiagonaleinträge. (Dies sieht man z.B. durch rekursives Entwickeln nach jeweils der 1. Zeile.) Es gilt also:

$$f(x) = (x-1)^{n-1} \cdot (x + (n-1)).$$

Die einzigen Nullstellen von f sind 1 und $1-n$. Ferner ist $f(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$.