Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 06./07.12.07

Lineare Algebra I

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Elementarmatrizen und Basiswechsel

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, und sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathcal{B}' := (b_1 + \lambda b_2, b_2, \dots, b_n)$$

eine Basis von V ist, und finden Sie die Matrix der Basistransformation $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.

(b) Finden Sie für jede Elementarmatrix A eine Basis $\mathcal{B}'$ mit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.

(G 2)

Wir betrachten die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) := (-\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y, +\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}y)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A := \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}(\phi)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$.

(b) Raten Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass die Matrix von ϕ bezüglich dieser Basis (in Definition- und Bildbereich) Diagonalgestalt hat.

(c) Ist A invertierbar? Berechnen Sie ggf. die Inverse von A durch geeignete Basistransformation.

(d) Berechnen Sie A^{10}.

(G 3) Produkte von Vektorräume

Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Wir statten das kartesische Produkt $V \times W$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation aus:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$
$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $V \times W$ mit diesen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $i_V : V \to V \times W$, $i_V(v) := (v, 0)$ und $i_W : W \to V \times W$, $i_W(w) := (0, w)$ injektive, lineare Abbildungen sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\pi_V : V \times W \to V$, $\pi_V(v, w) := v$ und $\pi_W : V \times W \to W$, $\pi_W(v, w) := w$ surjektive lineare Abbildungen sind und dass gilt:

$$\ker \pi_V = \operatorname{im} i_W , \qquad \ker \pi_W = \operatorname{im} i_V .$$

(d) Folgern Sie: $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

(e*) (universelle Eigenschaft 1) Zeigen Sie, dass es für je zwei Abbildungen $\phi : Z \to V$ und $\psi : Z \to W$ in auf einem gemeinsamen Vektorraum Z über $\mathbb{K}$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : Z \to V \times W$ gibt mit

$$\phi = \pi_V \circ \Phi \,, \qquad\qquad \psi = \pi_W \circ \Phi \,.$$

(f*) (universelle Eigenschaft 1) Zeigen Sie, dass es für je zwei Abbildungen $\phi : V \to Z$ und $\psi : W \to Z$ in einen gemeinsamen Vektorraum Z über $\mathbb{K}$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : V \times W \to Z$ gibt mit

$$\phi = \Phi \circ \imath_V \,, \qquad\qquad \psi = \Phi \circ \imath_W \,.$$

Hausübungen

(A 23) (10 Punkte)

Berechnen Sie das Inverse der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [1] & [2] \\ [3] & [4] & [1] \end{pmatrix} \,.$$

(A 24) (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Mit $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Spiegelung an der Ursprungsebene $E := \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0 \,\}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich einer geeignet gewählten Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes und des Kerns von σ.

(d) Ist σ invertierbar? Bestimmen Sie ggf. das Inverse der Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis.

(A 25) (10 Punkte)

Wir betrachen den Vektorraum $\mathcal{P}_3$ aller Polynome vom Grad 3 oder kleiner. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_t : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$, $\varphi_t(p) := p(t)$ linear ist, und bestimmen Sie die Matrix von φ_t bezüglich der Monombasis $1, x, x^2, x^3$ auf $\mathcal{P}_3$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des linearen Teilraums $U_t := \{\, p \in \mathcal{P}_3 \mid p(t) = 0 \,\}$.

(c) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$, welche als Kern gerade den linearen Teilraum $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ hat. Zeigen Sie, dass diese Abbildung surjektiv ist.

(d) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U_0 \cap U_1 \cap U_2$.