Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 06./07.12.07

Lineare Algebra I

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Elementarmatrizen und Basiswechsel

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, und sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathcal{B}' := (b_1 + \lambda b_2, b_2, \ldots, b_n)$$

eine Basis von V ist, und finden Sie die Matrix der Basistransformation $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.

(b) Finden Sie für jede Elementarmatrix A eine Basis $\mathcal{B}'$ mit $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen, dass die Vektoren $b_1 + \lambda b_2, b_2, \ldots, b_n \in V$ linear unabhängig sind. Seien hierzu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(b_1 + \lambda b_2) + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n \\ &= \alpha_1\, b_1 + (\alpha_1\, \lambda + \alpha_2) b_2 + \alpha_3\, b_3 + \cdots + \alpha_n\, b_n\ . \end{aligned}$$

Weil $b_1, \ldots, b_n$ ein Basis bilden, gilt dann $\alpha_1 = 0$, $(\alpha_1 \lambda + \alpha_2) = 0$ und $\alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$. Es folgt, dass alle Koeffizienten α_i verschwinden.

Die Transformationsmatrix ist die Elementarmatrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = Q_1^2(\lambda)\ .$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{für } S_i(\lambda): &\quad \mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_{i-1},\ \lambda b_i,\ b_{i+1}, \ldots, b_n) \\ \text{für } Q_i^j(\lambda): &\quad \mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i + \lambda b_j, b_{i+1}, \ldots, b_n) \\ \text{für } P_i^j: &\quad \mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_j, b_{i+1}, \ldots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

(G 2)

Wir betrachten die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \phi(x, y) := (-\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}y, +\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}y)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $A := \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_2}(\phi)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{K}_2$ von $\mathbb{R}^2$.

(b) Raten Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass die Matrix von ϕ bezüglich dieser Basis (in Definition- und Bildbereich) Diagonalgestalt hat.

(c) Ist A invertierbar? Berechnen Sie ggf. die Inverse von A durch geeignete Basistransformation.

(d) Berechnen Sie A^{10}.

LÖSUNG: (a) Wegen $\phi(e_1) = \frac{1}{5}(-2,6)^T$ und $\phi(e_2) = \frac{1}{5}(6,7)^T$ gilt

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} .$$

(b) Bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ mit $b_1 = (1,2)^T$ und $b_2 = (-2,1)^T$ gilt

$$B := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(c) Man sieht sofort, dass die Matrix B invertierbar mit $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Damit sind auch ϕ und A invertierbar mit

$$A^{-1} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{id}) \cdot B^{-1} \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) .$$

Für die Transfomrmationsmatrix $S := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{id}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ berechnet durch Raten oder das Verfahren aus der Vorlesung die Inverse zu

$$S^{-1} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Durch Einsetzen ergibt sich dann

$$A^{-1} = SB^{-1}S^{-1} = \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} .$$

(d) A^{10} ist die Matrix von ϕ^{10} bezüglich der Basis $\mathcal{K}_2$. Die Matrix von ϕ^{10} bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist durch

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Durch Transformation (und Ausrechnen der Matrixprodukte) erhalten wir also

$$A^{10} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{id}) \cdot B^{10} \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{K}_2}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = S\,B^{10}\,T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2^{10}+4 & 2^{11}-2 \\ 2^{11}-2 & 2^{12}+1 \end{pmatrix} .$$

(G 3) Produkte von Vektorräume

Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Wir statten das kartesische Produkt $V \times W$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation aus:

$$\begin{aligned} (v_1, w_1) + (v_2, w_2) &:= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ \lambda \cdot (v, w) &:= (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w) \end{aligned}$$

(a) Machen Sie sich klar, dass $V \times W$ mit diesen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $i_V : V \to V \times W$, $i_V(v) := (v, 0)$ und $i_W : W \to V \times W$, $i_W(w) := (0, w)$ injektive, lineare Abbildungen sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\pi_V : V \times W \to V$, $\pi_V(v, w) := v$ und $\pi_W : V \times W \to W$, $\pi_W(v, w) := w$ surjektive lineare Abbildungen sind und dass gilt:

$$\ker \pi_V = \operatorname{im} i_W , \qquad \ker \pi_W = \operatorname{im} i_V .$$

(d) Folgern Sie: $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$.

(e*) (universelle Eigenschaft 1) Zeigen Sie, dass es für je zwei Abbildungen $\phi : Z \to V$ und $\psi : Z \to W$ in auf einem gemeinsamen Vektorraum Z über $\mathbb{K}$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : Z \to V \times W$ gibt mit

$$\phi = \pi_V \circ \Phi \ , \qquad \qquad \psi = \pi_W \circ \Phi \ .$$

(f*) (universelle Eigenschaft 1) Zeigen Sie, dass es für je zwei Abbildungen $\phi : V \to Z$ und $\psi : W \to Z$ in einen gemeinsamen Vektorraum Z über $\mathbb{K}$ genau eine lineare Abbildung $\Phi : V \times W \to Z$ gibt mit

$$\phi = \Phi \circ \imath_V \ , \qquad \qquad \psi = \Phi \circ \imath_W \ .$$

LÖSUNG: (a) Das neutrale Element ist $(0,0)$ und das additive Inverse eines Elementes (v,w) ist das Element $(-v,-w)$. Alle Eigenschaften eines Vektorraumes folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften für V und W.

(b) Wir zeigen sämtliche Behauptungen nur für i_V und π_W. Die Beweise für i_W und π_V verlaufen analog.

Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned} i_V(\lambda v_1 + v_2) &= (\lambda v_1 + v_2, 0) = (\lambda v_1, 0) + (v_2, 0) = \lambda(v_1,0) + (v_2,0) \\ &= \lambda i_V(v_1) + i_V(v_2) \ . \end{aligned}$$

Somit ist i_V linear. Ist $v \in V$ ein Vektor mit $(0,0) = i_V(v) = (v,0)$, so folgt $v = 0$. Die Abbildung i_V hat also trivialen Kern und ist damit injektiv.

(c) Für alle $(v_1,w_1),(v_2,w_2) \in V \times W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \pi_W\big(\lambda(v_1,w_1) + (v_2,w_2)\big) &= \pi_W(\lambda v_1 + v_2, \lambda w_1 + w_2) = \lambda w_1 + w_2 \\ &= \lambda \pi_W(v_1,w_1) + \pi_W(v_2,w_2) \ . \end{aligned}$$

Die Abbildung π_W ist somit linear. Für jeden Vektor $w \in W$ gilt außerdem $w = \pi_W(0,w)$. Das Bild von π_W ist deshalb ganz W, d.h. π_W ist surjektiv.

Man rechnet direkt nach, dass $\pi_W \circ i_V$ die konstante Null-Abbildung ist. Somit liegt das Bild von i_V im Kern von π_W, d.h. $\operatorname{im} i_V \subseteq \ker \pi_W$. Ist umgekehrt $(v,w) \in V \times W$ ein Element von $\ker \pi_W$, so gilt $0 = \pi_W(v,w) = w$. Damit liegt $(v,w) = (v,0) = i_V(v)$ aber auch im Bild von i_V, d.h. es gilt $\ker \pi_W \subseteq \operatorname{im} i_V$.

(d) Betrachtet man die Abbildung π_W, so gilt nach der Dimensionsformel

$$\dim(V \times W) = \dim(\operatorname{im} \pi_W) + \dim(\ker \pi_W) = \dim(W) + \dim(\operatorname{im} i_V) \ .$$

Weil die Abbildung $i_V : V \to V \times W$ injektiv ist, hat ihr Bild die selbe Dimensionen wie V. Durch Einsetzen in die Gleichung ergibt sich die Behauptung.

(e) $\Phi(z) = \big(\phi(v), \psi(w)\big)$

(f) $\Phi(v,w) = \phi(v) + \psi(w)$

Hausübungen

(A 17) (10 Punkte)

Berechnen Sie das Inverse der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [1] & [2] \\ [3] & [4] & [1] \end{pmatrix} .$$

LÖSUNG: In $\mathbb{Z}_5$ gilt $[2] \cdot [3] = [1]$ und somit

$$\begin{array}{ccc|ccc}
[1] & [2] & [3] & [1] & & \\
[4] & [1] & [2] & & [1] & \\
[3] & [4] & [1] & & & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
[0] & [3] & [0] & [1] & [1] & [0] \\
[0] & [3] & [2] & [2] & [0] & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
 & [3] & [0] & [1] & [1] & [0] \\
 & [0] & [2] & [1] & [4] & [1] \\
\hline
[1] & [2] & [3] & [1] & [0] & [0] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3] \\
\hline
[1] & [2] & [0] & [2] & [4] & [1] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3] \\
\hline
[1] & & & [3] & [0] & [1] \\
 & [1] & & [2] & [2] & [0] \\
 & & [1] & [3] & [2] & [3]
\end{array} .$$

Die Inverse von A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [3] & [0] & [1] \\ [2] & [2] & [0] \\ [3] & [2] & [3] \end{pmatrix} .$$

(A 18) (10 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Mit $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Spiegelung an der Ursprungsebene $E := \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0 \,\}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich einer geeignet gewählten Basis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes und des Kerns von σ.

(d) Ist σ invertierbar? Bestimmen Sie ggf. das Inverse der Matrix von σ bezüglich der kanonischen Basis.

LÖSUNG: (a) Als Basis wählen wir zwei linear unabhängige Vektoren in der Ebene $b_1 := (1,0,0)^T$, $b_2 := (0,1,-1)^T$ und den Normalenvektor der Ebene $b_3 := (0,1,1)^T$. Dann hat σ bezüglich dieser Basis $\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$ die Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

denn es gilt $\sigma(b_1) = b_1$, $\sigma(b_2) = b_2$ und $\sigma(b_3) = -b_3$.

(b) Die Transformationsmatrix $S := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}_3}(\mathrm{id})$ hat die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Inverse von S lässt sich durch geschicktes Raten oder den Verfahren aus der Vorlesung bestimmen:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Bezüglich der Standardbasis hat σ also die Matrix

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(\sigma) = S\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\sigma)S^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Die Abbildung σ ist als Spiegelung invertierbar mit $\sigma^{-1} = \sigma$. Auch an der Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\sigma)$ sieht man sofort, dass sie selbstinvers ist. Das Bild von σ ist somit der ganz Raum $\mathbb{R}^3$ und der Kern ist trivial. Jede beliebige Basis von $\mathbb{R}^3$ (z.B. die kanonische Basis) ist damit eine Basis des Bildes von σ, und die leere Menge bildet eine Basis des Kerns.

(d) σ ist invertierbar mit $\sigma = \sigma^{-1}$. Somit gilt

$$\mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(\sigma^{-1}) = \mathcal{M}^{\mathcal{K}_3}_{\mathcal{K}_3}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A 19) (10 Punkte)

Wir betrachen den Vektorraum $\mathcal{P}_3$ aller Polynome vom Grad 3 oder kleiner. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_t : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$, $\varphi_t(p) := p(t)$ linear ist, und bestimmen Sie die Matrix von φ_t bezüglich der Monombasis $1, x, x^2, x^3$ auf $\mathcal{P}_3$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des linearen Teilraums $U_t := \{\, p \in \mathcal{P}_3 \mid p(t) = 0 \,\}$.

(c) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$, welche als Kern gerade den linearen Teilraum $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ hat. Zeigen Sie, dass diese Abbildung surjektiv ist.

(d) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U_0 \cap U_1 \cap U_2$.

LÖSUNG: (a) Für alle Polynome $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi_t(\lambda p_1 + p_2) = (\lambda p_1 + p_2)(t) = \lambda p_1(t) + p_2(t) = \lambda \varphi_t(p_1) + \varphi(p_2) .$$

Die Abbildung φ_t ist damit linear.

Es gilt $\varphi_t(1) = 1$, $\varphi_t(x) = t$, $\varphi_t(x^2) = t^2$ und $\varphi_t(x^3) = t^3$. Die gesuchte Matrix ist damit

$$A := \mathcal{M}^{(1,x,x^2,x^3)}_{1}(\varphi_t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$$

(b) Wir bestimmen eine Basis des Kerns der Matrix A und erhalten daraus eine Basis des Kerns von φ_t. Man sieht sofort, dass eine Basis des Kerns von A z.B. durch die Vektoren

$$v_1 = (-t, 1, 0, 0)^T , \qquad v_2 = (-t^2, 0, 1, 0)^T , \qquad v_3 = (-t^3, 0, 0, 1)^T$$

gegeben ist. Eine Basis von $\ker \varphi_t$ ist somit durch die Polynome $p_1 = x - t$, $p_2 = x^2 - t^2$ und $p_3 = x^3 - t^3$ gegeben.

(c) Eine solche Abbildung ist z.B.

$$\Phi : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(p) := \begin{pmatrix} \varphi_0(p) \\ \varphi_1(p) \\ \varphi_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} .$$

Die Vektoren $(2,0,0)^T$, $(0,-1,0)^T$ und $(0,0,-1)$ liegen im Bild dieser Abbildung, denn es gilt

$$\begin{aligned} \Phi\big((x-1)(x-2)\big) &= (2,0,0)^T \ , \\ \Phi\big(x(x-2)\big) &= (0,-1,0)^T \ , \\ \Phi\big((x-1)(x-3)\big) &= (0,0,-1)^T \ . \end{aligned}$$

Weil diese Vektoren ganz $\mathbb{R}^3$ erzeugen und das Bild ein linearer Teilraum ist, gilt $\operatorname{im}\Phi = \mathbb{R}^3$, d.h. Φ ist surjektiv.

(d) Nach der Dimensionsformel für Φ gilt

$$4 = \dim \mathcal{P}_3 = \dim(\operatorname{im}\Phi) + \dim(\ker\Phi) = 3 + \dim(\ker\Phi) \ .$$

Der Kern von Φ ist damit ein eindimensionaler Teilraum. Jedes Polynom $p \neq 0$ in diesem Teilraum bildet deshalb einen Basis des Teilraums. Ein solches Polynom ist z.B. durch $p = x(x-1)(x-2)$ gegeben.