Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

7. Übung

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- ☐ Die Summe zweier linearer Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
- ☐ Der Schnitt zweier linearer Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

(T 2) In einem endlichdimensionalen Vektorraum ist eine Basis stets eine

- ☐ linear unabhänige Teilmenge.
- ☐ maximale linear unabhänige Teilmenge.
- ☐ minimale linear unabhänige Teilmenge.

(T 3) Für Untervektorräume U und V eines Vektorraumes W gilt stets

- ☐ $\dim(U \cap V) = \dim U - \dim V$.
- ☐ $\dim(U \cap V) = \dim V - \dim U$.
- ☐ $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$.

(G 1) Darstellungsmatrix

Es sei $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ einer reelle $m \times n$-Matrix. Durch $L(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{x}$ wird eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert.

(a) Die Bilder $L(\mathbf{e_j})$ der Basisvektoren sind Linearkombinationen $\sum_i c_{ji}\mathbf{e}_i$ der Basisvektoren $\mathbf{e}_i \in \mathcal{K}_m$. Geben Sie die Koeffizienten c_{ji} mit Hilfe der Matrix M an.

(b) Geben sie die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_m}^{\mathcal{K}_n}(L)$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_m$ an.

(G 2) Darstellungsmatrix

Es sei V der Vektorraum aller rellen Polynome vom Grad ≤ 4 mit der Basis $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

(a) Welche Dimension hat V?

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_B^B(\frac{d}{dx})$ der Ableitung $\frac{d}{dx} : V \to V$ an.

(G 3) Kern und Bild

(a) Gegeben sei die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Ist ϕ linear? Bestimmen Sie den Kern sowie das Bild von ϕ und geben Sie Basen an.

(b) Es sei $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{X}$ eine lineare Abbildung, welche durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker\phi_A$ und $\mathrm{im}\phi_A$.

(G 4) Basiswechsel

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ zwei reelle Vektorräume. Die Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$ definieren zwei Isomorphismen $\phi_{\mathcal{K}_m} : \mathbb{R}^3 \to V$ und $\phi_{\mathcal{K}_n} : \mathbb{R}^2 \to W$ (vergl. Vorlesung). Weiterhin sei durch die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermöge $L(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{x}$ eine lineare Abbildung $L : V \to W$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_n}^{\mathcal{K}_m}(L)$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$.

(b) Es seien $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ zwei weitere Basen von V bzw. W. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{B}}(\phi_{\mathcal{K}_3}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{K}_2}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}})$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(G 5) Der Dualraum

Es sei V ein reller Vekrorraum und $V^* = \hom(V, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller linearen Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ von V nach $\mathbb{R}$ (genannt der *Dualraum zu* V).

(a) Geben Sie im Fall $V = \mathbb{R}^n$ eine Basis des Vektorraumes V^* an. Welche Dimension hat hier V^*.

(b) Es sei $i : V = \mathbb{R}^n \to (V^*)^*$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ die Auswertungsabbildung. Ist i linear, injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus?

Hausübungen

(A 20) (10 Punkte)

Bearbeiten Sie Aufgabe G5.

(A 21) (10 Punkte)

Die Abbildungen $\phi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ und $\phi_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ seien durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ -1 & 9 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker\phi_A$ und $\mathrm{im}\phi_A$ sowie von $\ker\phi_B$ und $\mathrm{im}\phi_B$.

(A 22) (10 Punkte)

Beweisen Sie, daß eine Summe $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ von Untervektorräumen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ eines Vektorraums V wiederum ein Untervektorraum von V ist. (Zur Erinnerung:
$U_1 + U_2 + \cdots + U_n := \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid \forall\, 0 \leq i \leq n : u_i \in U_i\}$)