Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

☐ Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
☐ Die Summe zweier linearer Untervektorräume ist ein Untervektorraum.
☐ Der Schnitt zweier linearer Untervektorräume ist ein Untervektorraum.

(T 2) In einem endlichdimensionalen Vektorraum ist eine Basis stets eine

☐ linear unabhänige Teilmenge. ☐ maximale linear unabhänige Teilmenge.
☐ minimale linear unabhänige Teilmenge.

(T 3) Für Untervektorräume U und V eines Vektorraumes W gilt stets

☐ $\dim(U \cap V) = \dim U - \dim V$. ☐ $\dim(U \cap V) = \dim V - \dim U$.
☐ $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$.

(G 1) Darstellungsmatrix

Es sei $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ einer reelle $m \times n$-Matrix. Durch $L(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{x}$ wird eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert.

(a) Die Bilder $L(\mathbf{e_j})$ der Basisvektoren sind Linearkombinationen $\sum_i c_{ji}\mathbf{e}_i$ der Basisvektoren $\mathbf{e}_i \in \mathcal{K}_m$. Geben Sie die Koeffizienten c_{ji} mit Hilfe der Matrix M an.

(b) Geben sie die Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{K}_n}_{\mathcal{K}_m}(L)$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_n$ und $\mathcal{K}_m$ an.

LÖSUNG:

(a) Die sind die Spalten der Matrix M: $L(\mathbf{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\mathbf{e}_i$.

(b) Dies ist die Matrix M.

(G 2) Darstellungsmatrix

Es sei V der Vektorraum aller rellen Polynome vom Grad ≤ 4 mit der Basis $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

(a) Welche Dimension hat V?

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^B_B(\frac{d}{dx})$ der Ableitung $\frac{d}{dx} : V \to V$ an.

LÖSUNG:

(a) Da die Basis B genau 5 Elemente hat ist der Vektorraum V 5-dimensional.

(b) Die lineare Abbildung $\frac{d}{dx} : V \to V$ bildet die Basisvektoren $1, x, x^2, x^3, x^4$ wie folgt ab:

$$x^4 \mapsto 4x^3 \quad x^3 \mapsto 3x^2 \quad x^2 \mapsto 2x \quad x \mapsto 1 \quad 1 \mapsto 0$$

Die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_B^B(\frac{d}{dx})$ lautete daher

$$\mathcal{M}_B^B(\frac{d}{dx}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(G 3) Kern und Bild

(a) Gegeben sei die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Ist ϕ linear? Bestimmen Sie den Kern sowie das Bild von ϕ und geben Sie Basen an.

(b) Es sei $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{X}$ eine lineare Abbildung, welche durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker\phi_A$ und $\mathrm{im}\phi_A$.

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung ϕ ist linear, da sie durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. Es ist $\ker\phi = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$ und $\mathrm{im}\phi = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$. Eine Basis des Kerns ist z.B. $\{(1 \ \ -1)^T\}$ und eine Basis des Bildes ist z.B. $\{(1 \quad 1)^T\}$.

(b) Um den Kern von ϕ_A zu bestimmen, suchen wir diejenigen Vektoren v mit $Av = 0$. Diese ermitteln wir über den Gauß–Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ \hline -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also ist $\ker\phi_A = \mathrm{span}(2, -2, 3)^T$ und der Vektor $(2, -1, 3)^T$ ist eine Basis von $\ker\phi_A$. Somit wissen wir auch, dass $\mathrm{im}\phi_A$ zweidimensional ist. Da die beiden Vektoren

$$\phi_A(e_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \phi_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von $\mathrm{im}\phi_A$.

(G 4) Basiswechsel

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ zwei reelle Vektorräume. Die Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$ definieren zwei Isomorphismen $\phi_{\mathcal{K}_m} : \mathbb{R}^3 \to V$ und $\phi_{\mathcal{K}_n} : \mathbb{R}^2 \to W$ (vergl. Vorlesung). Weiterhin sei durch die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vermöge $L(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{x}$ eine lineare Abbildung $L : V \to W$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_n}^{\mathcal{K}_m}(L)$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{K}_m$ und $\mathcal{K}_n$.

(b) Es seien $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ zwei weitere Basen von V bzw. W. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{B}}(\phi_{\mathcal{K}_3}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{K}_2}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{C}})$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

LÖSUNG:

(a) Wie in der vorigen Aufgabe folgt $\mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_3}(L) = M$.

(b) Diese Darstellungsmatrizen haben als Spalten genau die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{B}}(\phi_{\mathcal{K}_3}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{K}_2}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) = [\mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{C}}(\phi_{\mathcal{K}_2}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}})]^{-1} \circ \mathcal{M}_{\mathcal{K}_2}^{\mathcal{K}_3}(L) \circ \mathcal{M}_{\mathcal{K}_3}^{\mathcal{B}}(\phi_{\mathcal{K}_3}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}})$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(G 5) Der Dualraum

Es sei V ein reller Vekrorraum und $V^* = \hom(V, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller linearen Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ von V nach $\mathbb{R}$ (genannt der *Dualraum zu* V).

(a) Geben Sie im Fall $V = \mathbb{R}^n$ eine Basis des Vektorraumes V^* an. Welche Dimension hat hier V^*.

(b) Es sei $i : V = \mathbb{R}^n \to (V^*)^*$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ die Auswertungsabbildung. Ist i linear, injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus?

LÖSUNG:

(a) Für jede lineare Abbildung $f : V = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $f(\sum c_i \mathbf{e}_i) = \sum c_i f(\mathbf{e}_i)$ und die Abbildung f ist durch die Werte an den Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ eindeutig bestimmt. Daher ist $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ mit

$$\mathbf{e}'_i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Basis des Dualraumes V^*. Weil diese Basis n Elemente hat, ist der Dualraum hier n-dimesional. Er hat somit die gleiche Dimension wie V.

(b) Für je zwei Vektoren v und w aus V sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$\begin{aligned} i(\lambda v + w)(f) = (f \mapsto f(\lambda v + w)) &= (f \mapsto [\lambda f(v) + f(w)]) \\ &= \lambda(f \mapsto f(v)) + (f \mapsto f(w)) \\ &= \lambda[i(v)(f)] + i(w)(f) \end{aligned}$$

für alle $f \in V^*$. Somit ist i eine lineare Abbildung. Weiterhin gilt

$$i(\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}'_i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $0 \leq i, j \leq n$. Nach a) ist $\{i(\mathbf{e}_1), \dots, i(\mathbf{e}_n)\}$ somit eine Basis des Dualraumes $(V^*)^*$ zu V^*. Da die lineare Abbildung i die Basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ auf die gleichmächtige (d.h. gleich große) Basis $\{i(\mathbf{e}_1), \dots, i(\mathbf{e}_n)\}$ abbildet, ist i ein Isomorphismus und somit insbesondere injektiv und surjektiv.

Hausübungen

(A 14) (10 Punkte)

Bearbeiten Sie Aufgabe G5.

(A 15) (10 Punkte)

Die Abbildungen $\phi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ und $\phi_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ seien durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ -1 & 9 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker\phi_A$ und $\operatorname{im}\phi_A$ sowie von $\ker\phi_B$ und $\operatorname{im}\phi_B$.

LÖSUNG:

Aufgabe Analog zur Gruppenübung benutzen wir den Gauß–Jordan Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrr} -3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\ker\phi_A$. Das bedeutet, dass $\mathrm{im}\phi_A$ zwei-dimensional ist. Somit bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{im}\phi_A$. Das gleiche Verfahren führt im Falle von B zum Erfolg.

$$\begin{array}{rrrrr}
2 & -6 & 0 & 8 & 4 \\
1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\
-1 & 9 & -2 & 6 & -2 \\
1 & -6 & 1 & -1 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\
2 & -6 & 0 & 8 & 4 \\
-1 & 9 & -2 & 6 & -2 \\
1 & -6 & 1 & -1 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\
0 & -12 & -4 & 0 & -12 \\
0 & 12 & 0 & 10 & 6 \\
0 & -9 & -1 & -5 & -6 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\
0 & -12 & -4 & 0 & -12 \\
0 & 0 & -4 & 10 & -6 \\
0 & 0 & -8 & 20 & -12 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\
0 & -12 & -4 & 0 & -12 \\
0 & 0 & -4 & 10 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Somit bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -13/2 \\ -5/6 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -7/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\ker\phi_B$. Analog zu Beispiel 4.4.6 finden wir eine Basis von $\mathrm{im}\phi_B$ durch Anwenden des Gauß–Jordan-Algorithmus auf die Transponierte von B:

$$\begin{array}{rrrr}
2 & 1 & -1 & 1 \\
-6 & 3 & 9 & -6 \\
0 & 2 & -2 & 1 \\
8 & 4 & 6 & -1 \\
4 & 8 & -2 & 2 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 6 & 6 & -3 \\
0 & 2 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 10 & -5 \\
0 & 6 & 0 & 0 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 6 & 6 & -3 \\
0 & 0 & 12 & -6 \\
0 & 0 & 10 & -5 \\
0 & 0 & 6 & -3 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 6 & 6 & -3 \\
0 & 0 & 12 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Damit bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{im}\phi_B$.

(A 16) (10 Punkte)

Beweisen Sie, daß eine Summe $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ von Untervektorräumen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ eines Vektorraums V wiederum ein Untervektorraum von V ist.

Lösung:

Es seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ lineare Teilräume des Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir verifizieren die UntervektorraumAxiome für $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.

(U1) Da die Teilräume $U_1, U_2, \ldots, U_n$ die $\mathbf{0}$ enthalten, enthält auch $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ den Vektor $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$.

(U2) Seien $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ und $u_1' + u_2' + \cdots + u_n' \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ mit $u_1, u_1' \in U_1; u_2, u_2' \in U_2; \ldots u_n, u_n' \in U_n$. Dann gilt

$$(u_1+u_2+\cdots+u_n)+(u_1'+u_2'+\cdots+u_n') = (u_1+u_1')+(u_2+u_2')+\cdots+(u_n+u_n') \in U_1+U_2+\cdots+U_n.$$

(U3) Seien $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ und sei $\mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\mu(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \mu u_1 + \mu u_2 + \cdots + \mu u_n \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n.$$