Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 22./23.11.07

Lineare Algebra I

6. Übung

Gruppenübungen

Lemma 1. *Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und $w_1, \dots, w_s \in V$ Vektoren mit*

(a) $s > r$

(b) Die Vektoren $w_1, \dots, w_s$ liegen in dem von den Vektoren $v_1, \dots, v_s$ aufgespannten, linearen Teilraum, d.h. es gibt Skalare $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ mit

$$w_i = \alpha_{1,i}v_1 + \alpha_{2,i}v_2 + \cdots + \alpha_{r,i}v_r \; .$$

Dann sind die Vektoren $w_1, \dots, w_s$ linear abhängig.

(G 1)

Sie haben Lemma 1 für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bereits in der Vorlesung gezeigt. Beweisen Sie Lemma 1 indem sie den Beweis aus der Vorlesung verallgemeinern.

Satz 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}_n$ mit der Addition und Multiplikation (wie in der 5. Übung). $\mathbb{Z}_n$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.*

(G 2)

Wir wollen Satz 1 in mehreren Schritten beweisen. Für die Elemente von $\mathbb{Z}_n$ schreiben wir wie in der 5. Übung $[x] = \{\, y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv x \pmod{n} \,\}$.

(a) In der 5. Übung haben Sie bereits einige Eigenschaften von $\mathbb{Z}_n$ gezeigt. Welche Körperaxiome haben Sie für $\mathbb{Z}_n$ bereits gezeigt, welche nicht?

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{Z}_n$ kein Körper ist.

Wir müssen damit nur noch zeigen, dass für einen Primzahl $p \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{Z}_p$ mit ihren Verknüpfungen tatsächlich einen Körper bildet. Sei also im Folgenden stets $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Mit Hilfe von Zerlegung in Primfaktoren kann man zeigen, dass für alle $x, y \in \mathbb{Z}$

$$p \mid x \cdot y \qquad \Longrightarrow \qquad p \mid x \quad \text{oder} \quad p \mid y$$

gilt. Zeigen Sie damit für alle $x, y \in \mathbb{Z}$:

(c) Gilt $[x \cdot y] = [0]$, so ist $[x] = [0]$ oder $[y] = [0]$.

(d) Gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[x^k] = [0]$, so gilt $[x] = [0]$.

(e) Gibt es natürliche Zahlen $k_2 > k_1$ mit $[x^{k_1}] = [x^{k_2}]$, so ist $[x] = [0]$ oder $[x^{k_2-k_1}] = [1]$.

Um den Beweis zu vervollständigen, zeigen Sie:

(f) Sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $[x] \neq [0]$. Dann gibt es Exponenten $k_1 \neq k_2$ mit $[x^{k_1}] = [x^{k_2}]$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ endlich ist.

(g) $\mathbb{Z}_p$ bildet einen Körper.

Hausübungen

(A 17) (10 Punkte)

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix mit reellen Einträgen. Wir betrachten die zugehörige lineare Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$. Zeigen Sie, dass der Rang von A gleich der Dimension des Bildes von ϕ_A ist, d.h.

$$\operatorname{Rang} A = \dim(\operatorname{Bild} \phi_A)\ .$$

(A 18) (10 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $0 \cdot v = 0$ und $\lambda \cdot 0 = 0$.

(b) $(-1) \cdot v = (-v)$.

(c) Gilt $\lambda \cdot v = 0$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie:

(d) Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es ein Element $z \in \mathbb{K}$ mit $x \cdot z = y$.

(A 19) (10 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe den Körper mit vier Elementen konstruieren. Hierzu betrachten wir das kartesische Produkt $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und statten diese Menge mit der koordinatenweisen Addition aus:

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{K}, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.

(b) Zeige Sie, dass $\mathbb{K}$ mit der koordinatenweisen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

keinen Körper bildet.

(c) Definieren Sie eine Multiplikation auf $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ mit $(1, 0)$ als neutralem Element, so dass $\mathbb{K}$ mit dieser Multiplikation und der koordinatenweisen Addition einen Körper bildet. (Auf den Nachweis des Distributivgesetztes können Sie verzichten.)

Hinweis: Die in Aufgabe A18 gezeigte Aussage könnte hilfreich sein.