Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

5. Übung

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Ausdrücke sind dann definiert?

☐ AB ☐ BA ☐ $A+B$ ☐ CD ☐ DC ☐ C^2 ☐ D^2

(T 2)

Welche der folgenden Ausdrücke sind für beliebige $n \times n$–Matrizen A und B und die Einheitsmatrix E_n richtig?

☐ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ☐ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ☐ $(A+E_n)(A-E_n) = A^2 - E_n$

(G 1)

Beweisen Sie, daß die folgenden Aussagen für einen Körper $\mathbb{K}$ richtig sind:

1. $\forall a \in \mathbb{K} : a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$
2. $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Nullteilerfreiheit)
3. $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot (-b) = -(ab) = (-a)b$
4. $\forall a, b \in \mathbb{K} : (-a) \cdot (-b) = ab$

(G 2) Äquivalenzrelationen (Wiederholung)

Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* n, geschrieben $a \equiv b \pmod{n}$, falls die ganze Zahl $a - b$ durch n teilbar ist.

(a) Beweisen Sie, daß die Kongruenz $\equiv \pmod{n}$ modulo n eine Äquivalenzrelation ist, d.h. daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall a \in \mathbb{Z} : a \equiv a \pmod{n}$ (Reflexivität)
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (a \equiv b \pmod{n}) \Rightarrow (b \equiv a \pmod{n})$ (Symmetrie)
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \equiv b \pmod{n}) \wedge (b \equiv c \pmod{n}) \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ (Transitivität)

(b) Zeigen Sie, daß die Kongruenz $\equiv \pmod{n}$ modulo n sogar eine Kongruenzrelation ist, d.h. daß zusätzlich die Bedingungen

1. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} : (a \equiv b \pmod{n}) \wedge (c \equiv d \pmod{n}) \Rightarrow (a + c \equiv b + d \pmod{n})$
2. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} : (a \equiv b \pmod{n}) \wedge (c \equiv d \pmod{n}) \Rightarrow (a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n})$

erfüllt sind.

(G 3) Restklassenringe

Es sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die *Kongruenzklasse* $[a]$ modulo n einer ganzen Zahl a ist die Menge $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv a \pmod{n}\}$ aller zu a kongruenten ganzen Zahlen. Die Menge aller dieser Kongruenzklassen wird mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie, daß sich die Addition und die Multiplikation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}_n$ übertragen, d.h. daß die Operationen $[a]+[b] := [a+b]$ und $[a]\cdot[c] := [a\cdot c]$ wohldefiniert sind.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}_n$ mit obiger Addition eine kommutative Gruppe ist. Welches ist hier das neutrale Element?

(c) Beweisen Sie, daß die Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ assoziativ und kommutativ ist sowie daß das Distributivgesetz gilt.

(d) Zeigen Sie daß $\mathbb{Z}_2$ mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper ist. Geben Sie die Gruppentafel fur die Gruppen $(\mathbb{Z}_n, +, [0])$ und $(\mathbb{Z}_n \setminus \{[0]\}, \cdot, [1])$ an.

(G 4)

Es sei $\mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen Polynome. Bekanntlich können zwei Polynome addiert und multipliziert und mit einer reellen Zahl skalar multipliziert werden. Für die reellen Polynome $p = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ und $q = \sum_{i=0}^n q_i x^i$ $(n \in \mathbb{N})$ und die reelle Zahl λ gilt:

$$\begin{aligned} p+q &= \sum_{i=0}^n (p_i+q_i)x^i, && \text{Addition} \\ p\cdot q &= \sum_{i,j=0}^n p_i q_j x^{i+j}, && \text{Multiplikation} \\ \lambda\cdot p &= \sum_{i=0}^n \lambda p_i x^i && \text{Skalarmultiplikation.} \end{aligned}$$

Bemerkung: Da die Koeffizienten p_i und q_i $(i \in \{1,\ldots,n\})$ auch gleich Null sein dürfen, beinhalten die obige Definition auch die Addition und Multiplikation von Polynomen unterschiedlichen Grades.

(a) Zeige, daß $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (b) Ist $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ auch ein Körper?

Hausübungen

(A 14) (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, daß $\mathbb{Z}_3$ mit der Addition und der Multipliaktion aus Aufgabe G 3 ein Körper ist und geben Sie die Gruppentafeln für $(\mathbb{Z}_3, +, [0])$ und $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{[0]\}, \cdot, [1])$ an.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}_4$ in obigem Sinne kein Körper ist.

(A 15) (10 Punkte)

(a) In jeder Zeile und jeder Spalte der folgenden Verknüpfungstafel kommt jedes Element genau einmal vor. Trotzdem handelt es sich nicht um eine Gruppentafel. Warum nicht?

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

(b) Es seien s und t ganze Zahlen. Man betrachte auf $\mathbb{Z}$ die Verknüpfung $\odot$ mit $a \odot b := sa + tb$ (für alle $a, b \in \mathbb{Z}$). Für welche s, t ist diese Verknüpfung assoziativ bzw. kommutativ?

(A 16) (10 Punkte)

Sei $A := \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Auf $A \times A$ definieren wir eine Abbildung $\odot$ durch $a \odot b := a + b - ab$. Man zeige, dass $\odot$ eine Verknüpfung und $(A, \odot)$ eine kommutative Gruppe ist.