Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 08./09.11.07

Lineare Algebra I

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Minitest

Wobei handelt es sich **nicht** um eine Gruppe?

☐ $(\mathbb{R}, +)$ ☐ $(\mathbb{R}^n, +)$ ☐ $(\mathbb{R}, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

☐ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ☐ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ☐ $(\mathbb{N}, +)$ ☐ $(\mathbb{Z}, -)$

Satz 1. *Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times k$-Matrix. Dann gilt*

$$\operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Rang}(A) \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{Rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{Rang} B\,.$$

(G 2)

Sei A eine $m \times n$-Matrix und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Teilraum.

(a) Zeigen Sie, dass
$$V := \{Ax \mid x \in U\}$$
ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^m$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Dimension von V kleiner gleich der Dimension von U ist.

(c) Beweisen Sie damit Satz 1.

Definition 1. *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge $H \subseteq G$ mit den Eigenschaften:*

(i) $e \in H$,

(ii) für alle $a, b \in H$ gilt auch $ab \in H$,

(iii) für alle $a \in H$ gilt auch $a^{-1} \in H$.

(G 3)

Sei G ein Gruppe mit der Verknüpfung $\bullet : G \times G \to G$ und neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass für eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ die folgenden Bedinungen äquivalent sind:

(a) H ist eine Untergruppe von G.

(b) Die Verknüpfung lässt sich zu $\bullet : H \times H \to H$ einschränken und das Paar $(H, \bullet)$ bildet eine Gruppe mit neutralem Element e.

(c) Für alle $a, b \in H$ gilt auch $ab^{-1} \in H$.

(G 4)

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $k\mathbb{Z} := \{kn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von dieser Form ist.

Hausübungen

(A 11) (10 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie:

(a) (Kürzungsregel)
Seien $a, b \in G$. Gibt es ein Element $c \in G$ mit $ac = bc$ oder mit $ca = cb$, so gilt $a = b$.

(b) Gilt $a^2 = e$ für jedes Element $a \in G$, so ist G abelsch.

(c) Sei $g \in G$. Wir definieren induktiv für $n \geq 0$

$$g^0 := e \qquad\qquad g^{n+1} := gg^n$$

und setzen $g^{-n} := (g^n)^{-1}$. Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$g^n g^m = g^{n+m} \ .$$

Satz 2 (Satz von Lagrange). *Sei G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann teilt die Kardinalität der Untergruppe $|H|$ die Kardinalität der Gruppe $|G|$.*

(A 12) (10 Punkte)

Wir wollen den Satz von Lagrange in mehreren Schritten beweisen. Sei hierzu G eine Gruppe mit endlich vielen Elementen und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

(a) Für $a \in G$ heißt die Menge $aH := \{ah \mid h \in H\}$ Nebenklasse von H. Zeigen Sie, dass für zwei Elemente $a, b \in G$ entweder $aH = bH$ oder $aH \cap bH = \emptyset$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass H eine Nebenklasse von sich selbst ist.

(c) Zeigen Sie, dass alle Nebenklassen die gleiche Anzahl von Elementen haben, d.h. für alle $a, b \in G$ gilt $|aH| = |bH|$.

Hinweis: Sie können benutzen, dass zwei endliche Mengen die gleich Anzahl an Elementen haben, falls es eine Bijektion zwischen ihnen gibt.

(d) Zeigen Sie: $|H|$ teilt $|G|$.

Satz 3 (Kleiner Satz von Fermat). *Sei G eine endliche Gruppe mit $n = |G|$ Elementen und neutralem Element $e \in G$. Dann gilt für alle $g \in G$*

$$g^n = e \ .$$

(A 13) (10 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe in mehreren Schritten den kleine Satz von Fermat zeigen.

(a) Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\langle g \rangle := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

eine abelsche Untergruppe von G ist.

(b) Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\langle g \rangle = \{e, g^1, \ldots, g^{n-1}\} \ .$$

(c) Beweisen Sie den kleinen Satz von Fermat.

Hinweis: Beweisen Sie den Satz erst für die Gruppe $\langle g \rangle$ und nutzen Sie dann den Satz von Lagrange.