Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Zwei Vektoren sind linear abhängig, falls

☐ einer ein Vielfaches des anderen ist. ☐ einer von beiden der Nullvektor ist. ☐ die Summe von beiden der Nullvektor ist.

(T 2) Die Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung $x + y = 5$ beschrieben wird, hat eine parametrische Darstellung

☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(T 3) Sind u, v und w beliebige Vektoren, so sind die Vektoren $u - v$, $v - w$ und $w - u$

☐ linear unabhängig. ☐ linear abhängig. ☐ nichts von alledem.

(G 1)

Beweisen Sie, daß die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

eine linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

(G 2)

Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrixform und geben Sie die Lösungsmengen an (Verwenden Sie den Gaußalgorithmus):

a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

(G 3) Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren

Bestimmen Sie *alle* Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren.

(G 4)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Gaußalgorithmus:

(i)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & -9 \\ -4 & 14 & 5 & -15 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

(A 9) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel $\alpha^2 - 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$ (3. binomische Formel) hilfreich.

(A 10) (10 Punkte)

Überprüfen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$