Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

MINITEST

(T 1) Zwei Vektoren sind linear abhängig, falls

☐ einer ein Vielfaches des anderen ist. ☐ einer von beiden der Nullvektor ist. ☐ die Summe von beiden der Nullvektor ist.

(T 2) Die Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung $x + y = 5$ beschrieben wird, hat eine parametrische Darstellung

☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(T 3) Sind u, v und w beliebige Vektoren, so sind die Vektoren $u - v$, $v - w$ und $w - u$

☐ linear unabhängig. ☐ linear abhängig. ☐ nichts von alledem.

(G 1)

Beweisen Sie, daß die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

eine linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

LÖSUNG:

Es sei W die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems.

1. Da das Gleichungssytem homogen ist, ist $(0, \ldots, 0)$ eine Lösung. Somit folgt $0 \in W$.
2. Sind $(x_1, \ldots, x_n) \in W$ und $(y_1, \ldots, y_n) \in W$ zwei Lösungen des Gleichungssystems, so gilt $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0$ und $a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \cdots + a_{kn}y_n = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man die Gleichung $a_{k1}(x_1+y_1)+a_{k2}(x_2+y_2)+\cdots+a_{k2}(x_n+y_n) = 0$. Daher sind auch diese Gleichungen für alle $1 \leq k \leq n$ erfüllt, d.h. $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems, $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in W$.

3. Ist $(x_1,\dots,x_n)\in W$ eine Lösung des Gleichungssystems, so gilt $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=0$ für alle $1\le k\le n$. Durch Multiplikation mit einer beliebigen reellen Zahl $r\in\mathbb{R}$erhält man die Gleichung $a_{k1}rx_1+a_{k2}rx_2+\cdots+a_{kn}rx_n=0$. Daher ist auch diese Gleichung für alle $1\le k\le n$ erfüllt, d.h. $(rx_1,\dots,rx_n)$ ist eine Lösung des Gleichungssystems, $(rx_1,\dots,rx_n)\in W$.

Da alle Bedingungen, welche einen linearen Teilraum definieren erfüllt sind, ist W ein linearer Teilraum.

(G 2)

Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrixform und geben Sie die Lösungsmengen an (Verwenden Sie den Gaußalgorithmus):

a)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 1\\ x_1-2x_2+2x_3 &= 7\\ x_2-2x_3+5x_4 &= -4\\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &= -4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+4x_3 &= 1\\ x_1+x_2+x_3 &= -1\\ -x_1-x_2-3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Lösung:

1. Das Gleichungssytem läßt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\-4\\-4\end{pmatrix}=0$$

schreiben. Die Lösungsmengen werden nun mit dem Gaußalgorithmus berechnet. Dabei werden mit I - IV die Zeilen der Matrizen bezeichnet. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -2 & 5 & -4\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{I+IV,II+IV}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 5 & -4\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)\xrightarrow{IV+I,II+(-I)}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & -2 & 7 & -7\\ -1 & 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+(2II),IV+II}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{III/5}\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{also ist } x_4=1 \Rightarrow\ & x_3=6+x_4=7\\ \Rightarrow\ & x_2=3+2x_4=5\\ \Rightarrow\ & x_1=-2+x_2=3 \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge $L=\left\{\begin{pmatrix}3\\5\\7\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{II+III, I+(2III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{II+(-I),(-III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \lambda$ ist freier Parameter und $x_1 = 2 - x_2 - 3x_3 = 2 - \lambda - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2} - \lambda$.

Damit gilt $L = \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} \\ 0 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

(G 3) Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren

Bestimmen Sie *alle* Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Jordan-Eliminationsverfahren.

LÖSUNG:

wir betrachten die *erweiterte Matrix*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

welche nun mittels *elementarer Zeilenumformungen* modifiziert wird:

	- 1	1	2	2	1
	2	0	3	- 1	- 1
	2	- 2	6	0	2
	- 1	1	2	2	1
Z2+2·Z1	0	2	7	3	1
Z3+2·Z1	0	0	10	4	4
(-1)·Z1	1	- 1	-2	- 2	- 1
Z2·$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z3·$\frac{1}{10}$	0	0	1	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$
Z1+1·Z2	1	0	$\frac{3}{2}$	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$
	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	1	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$
Z1+(-$\frac{3}{2}$)·Z3	1	0	0	-$\frac{11}{10}$	-$\frac{11}{10}$
Z2(-$\frac{7}{2}$)·Z3	0	1	0	$\frac{1}{10}$	-$\frac{9}{10}$
	0	0	1	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$

Nach den Ausführungen auf S.56 a.a.O. besitzt das Gleichungssystem

$$\widetilde{A} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ \frac{4}{10} \end{pmatrix} = d$$

die gleichen Lösungen wie das ursprüngliche System. Wegen

$$r = \operatorname{rg} \widetilde{A} = m = 3$$

folgt mit

$$\begin{pmatrix} c_{1,4} \\ c_{2,4} \\ c_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

und der Vorschrift

$$x_k = d_k - \sum_{\nu=1}^{n-r} c_{k,r+\nu} \cdot x_{r+\nu} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, r$$

schließlich

$$\begin{aligned} x_1 = d_1 - c_{1,4} \cdot x_4 &= -\frac{11}{10} + \lambda \cdot \frac{11}{10}, \\ x_2 = d_2 - c_{2,4} \cdot x_4 &= -\frac{9}{10} - \lambda \cdot \frac{1}{10}, \\ x_3 = d_3 - c_{3,4} \cdot x_4 &= \frac{4}{10} - \lambda \cdot \frac{4}{10}, \end{aligned}$$

wobei mit

$$x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$$

ein freier Parameter eingeht. Die Menge *aller* Lösungen ist somit durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ \frac{4}{10} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ -\frac{4}{10} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

(G 4)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Gaußalgorithmus:

(i)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 3 & -9 \\ -4 & 14 & 5 & -15 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

(i)

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
-6 & 6 & 2 & -2 & 2 & S4 \leftrightarrow S1 \\
-9 & 8 & 3 & -2 & 3 & \\
-3 & 2 & 1 & 0 & 7 & \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
-2 & 8 & 3 & -9 & 3 & |Z2 - Z1 \\
0 & 2 & 1 & -3 & 7 & \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 7 & |Z3 - Z2 \\
\hline
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

(ii)

$$
\begin{array}{rrr|ll}
1 & 6 & -1 & 3 & \\
3 & 2 & 2 & -1 & |Z2 - 3Z1 \\
4 & 1 & 5 & -6 & |Z3 - 4Z1 \\
\hline
1 & 6 & -1 & 3 & \\
0 & -16 & 5 & -10 & \\
0 & -23 & 9 & -18 & |5Z3 - 9Z2 \\
\hline
1 & 6 & -1 & 3 & \\
0 & -16 & 5 & -10 & \\
0 & 29 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

d.h. $y_2 = 0$, $y_3 = -2$, $y_1 = 1$.

(iii)

$$
\begin{array}{rrrr|ll}
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
-2 & 8 & 3 & -9 & 3 & |Z3 + 2Z1 \\
-4 & 14 & 5 & -16 & 5 & |Z4 + 4Z1 \\
-2 & 6 & 2 & -6 & 2 & |Z5 + 2Z1 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 8 & 7 & -7 & 7 & |Z3 - 4Z2 \\
0 & 14 & 13 & -11 & 13 & |Z4 - 7Z2 \\
0 & 6 & 6 & -4 & 6 & |Z5 - 3Z2 \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 2 & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 & \\
0 & 0 & 6 & 10 & 6 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 & \\
\hline
1 & 0\;2 & 1 & 2 & & \\
0 & 2 & 1 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 3 & 5 & 3 &
\end{array}
$$

Damit ist $z_3 = 1 - 5/3 z_4$, $z_2 = 7/3 z_4$, $z_1 = 7/3 z_4$, also

$$L = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^4 : \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ -5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Hausübungen

(A 9) (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel $\alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)$ (3. binomische Formel) hilfreich.

LÖSUNG:

Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & \alpha^2 & \alpha \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2-2 & \alpha-3 \end{array}\right) \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right).$$

Die Größe der Lösungsmenge hängt davon ab, ob der Ausdruck $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$ gleich Null ist oder nicht. Daher unterscheiden wir drei Fälle:

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich kann eine Variable frei gewählt werden. Sei $x_3 = s$. Dann folgt $2x_2 - x_3 = -2$ also $x_2 = \frac{s-2}{2}$. Weiter folgt $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$ also $x_1 = 3 - (s-2) - 2s = 5 - 3s$. Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha=1}$:

$$L_{\alpha=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5-3s \\ \frac{s-2}{2} \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Für $\alpha = -1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

In der letzten Zeile steht die nicht erfüllbare Gleichung $0 = -2$, womit die Lösungsmenge $L_{\alpha=-1}$ leer ist.

Für $\alpha \neq \pm 1$ gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{\alpha-1}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\alpha+1}, \\ 2x_2 - x_3 &= -2 && \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 && \Rightarrow \quad x_1 = 5 - \frac{3}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Lösungsmenge $L_{\alpha\neq\pm1}$:

$$L_{\alpha\neq\pm1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - \frac{3}{\alpha+1} \\ \frac{1}{2(\alpha+1)} - 1 \\ \frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \right\}$$

(A 10) (10 Punkte)

Überprüfen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

Wir wenden das Gauß-Jordan Eliminationsverfahren an.

$$\begin{aligned} (A,b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (\tilde{A}, \tilde{b}) \end{aligned}$$

Wegen $rg(\tilde{A}, \tilde{b}) = 3 = rg(\tilde{A})$ ist das Gleichungssystem lösbar.
Spezielle Lösung ist $\hat{x} = (-3, -1, -3, 0)^\top$.

Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist $x_\lambda = \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)^\top$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$x = \hat{x} + x_\lambda = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung.