Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 25./26.10.07

Lineare Algebra I

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind. Skizzieren Sie U_1,U_2 und U_3.

(a) $U_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 = 0\}$

(b) $U_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right),\, 0 \le t \le 2\pi\right\}$

(c) $U_3 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u = r \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \text{ oder } u = s \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right),\, r, s \in \mathbb{R}\right\}$

(d) $U_4 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid 3u_3 = 2(u_1 - u_2) + 5\}$

(G 2)

(a) Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

(b) Skizziere die Lösungsmenge. Welches geometrische Objekt wird druch die Menge gebildet?

(c) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4\,. \end{array}$$

Welches geometrisch Objekt wird durch die Lösungsmenge beschrieben? Vergleiche dies mit der Lösungsmenge aus (a).

(G 3)

Wir betrachten die folgenden Teilmenge des $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}\,,$$
$$E_2 := \left\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Zeige, dass E_1 und E_2 lineare Teilräume des $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Skizziere E_1 und E_2 und mache dir so klar, dass E_1 und E_2 Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind.

(c) Schneiden sich die Ebenen? Bestimme ggf. die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$. Welches geometrische Objekt wird durch $E_1 \cap E_2$ gebildet?

Hausübungen

(A 1) (10 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$A := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$
$$B_\alpha := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeige, dass A und B_α für jedes α ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Welche geometrischen Objekte werden durch A bzw. B_α beschrieben?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $A \subseteq B_\alpha$?

(A 2) (10 Punkte)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Löse das lineare folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & - & \alpha\, x_3 & = & 1 - \alpha \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2\,\alpha\, x_3 & = & 2 - 2\alpha\,. \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösunsmenge. Welches geometrische Objekt wird durch V_α gebildet?

(b) Berechne die Schnittmenge von V_α mit der x-y-Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

(c) Zeige, dass die Menge der Schnittpunkte

$$V := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} V_\alpha \cap E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x \in V_\alpha \cap E\}$$

ein linearer Teilraum ist.

(A 3) (10 Punkte)

Wir betrachten die drei Punkte $p_1 = (0, 1, 1)$, $p_2 = (1, 2, 1)$ und $p_3 = (1, 0, 2)$ im $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen mit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene, welche die Punkte p_1, p_2 und p_3 enthält.

(a) Ist die Ebene E ein linearer Teilraum?

(b) Wir betrachten die folgende Gerade im $\mathbb{R}^3$:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme die Schnittmenge der Geraden g mit der Ebene E.