Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008 25./26.10.07

Lineare Algebra I

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind. Skizzieren Sie U_1,U_2 und U_3.

(a) $U_1 = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 = 0\}$

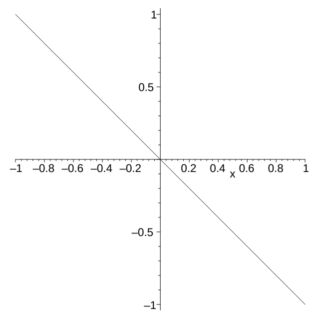
(b) $U_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u = \binom{2}{1} + 2 \cdot \binom{\cos t}{\sin t},\ 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$

(c) $U_3 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u = r \cdot \binom{2}{3} \text{ oder } u = s \cdot \binom{3}{-2},\ r, s \in \mathbb{R}\right\}$

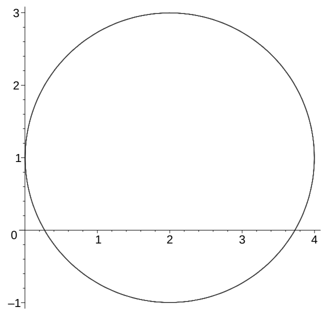
(d) $U_4 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid 3u_3 = 2(u_1 - u_2) + 5\}$

LÖSUNG:

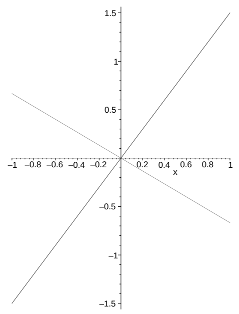
(a) U_1 ist ein linearer Teilraum:



(b) U_2 ist kein linearer Teilraum, weil $0 \notin U_2$:



(c) U_3 ist kein linearer Teilraum, denn $(2+3, 3-2) = (3, -1)$ liegt nicht in U_3, obwohl $(2, 3)$ und $(3, -2)$ in U_3 liegen:



(d) U_4 ist kein linearer Teilraum, weil $0 \notin U_4$. (Allerdings ist U_4 ein affiner Teilraum.)

(G 2)

(a) Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

(b) Skizziere die Lösungsmenge. Welches geometrische Objekt wird druch die Menge gebildet?

(c) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Welches geometrisch Objekt wird durch die Lösungsmenge beschrieben? Vergleiche dies mit der Lösungsmenge aus (a).

LÖSUNG:

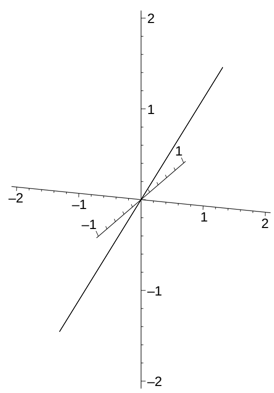
(a) Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus erhalten wir folgende Umformungen:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Für $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann $x_2 = -x_3/2 = -\lambda/2$ und $x_1 = x_3 = \lambda$. Die Lösungsmenge ist damit

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda/2 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Die Menge V_1 bildet eine Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(2,-1,2)^T$:



(c) Führt man die selben Transformationen im Gauß-Jordan-Algorithmus für die linke Spalte mit $(1,2,3,4)^T$ aus, so erhält man:

$$\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Für $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann $x_2 = (1-\lambda)/2$ und $x_1 = 2 + \lambda$. Als Lösungsmenge erhalten wir also

$$V_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2+\lambda \\ (21-\lambda)/2 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dies ist eine Gerade durch den Punkt $(2, 1/2, 0)^T$ mit Richtungsvektor $(2, -1, 2)^T$. Diese Gerade ist parallel zur Geraden V_1.

(G 3)

Wir betrachten die folgenden Teilmenge des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \} , \\ E_2 &:= \left\{ \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + \mu \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} . \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass E_1 und E_2 lineare Teilräume des $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Skizziere E_1 und E_2 und mache dir so klar, dass E_1 und E_2 Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind.

(c) Schneiden sich die Ebenen? Bestimme ggf. die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$. Welches geometrische Objekt wird durch $E_1 \cap E_2$ gebildet?

LÖSUNG:

(a) Sei $x, y \in E_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_1 + x_2 = 0 = y_1 + y_2$. Durch Addition der Gleichungen ergibt sich dann $0 = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, also $x + y \in E_1$. Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit λ ergibt sich $\lambda x_1 + \lambda x_2 = 0$, also $\lambda x \in E_1$.

Seien $x, y \in E_2$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es Zahlen $\lambda_x, \mu_x, \lambda_y, \mu_y \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \lambda_x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + \mu_x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) , \qquad y = \lambda_y \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + \mu_y \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) .$$

Durch Addition und Multiplikation mit t ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_x + \lambda_y) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + (\mu_x + \mu_y) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) , \\ t \cdot x &= t\, \lambda_x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + t\, \mu_x \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) , \end{aligned}$$

also $x + y, tx \in E_2$.

(b) Die Ebene E_1 ist die (eindeutig bestimmte!) Ebene durch den Ursprung mit Normalenvektor $(1, 1, 0)^T$. Die Ebene E_2 verläuft auch durch den Ursprung und wird von den Vektoren $(0, 1, 1)^T$ und $(0, 1, -1)^T$ aufgespannt. Man überlegt sich leicht, dass dies genau die y-z-Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Wir berechnen die Schnittpunkte von E_1 und E_2. Dies sind genau die Punkte x der y-z-Ebene mit $x_1 + x_2 = 0$, also alle Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ mit

$$x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_1 + x_2 = 0$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystem ist

$$V = E_1 \cap E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\} = \left\{\lambda \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

also ist $E_1 \cap E_2$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.

Hausübungen

(A 1) (10 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \\ B_\alpha &:= \left\{\lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass A und B_α für jedes α ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Welche geometrischen Objekte werden durch A bzw. B_α beschrieben?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $A \subseteq B_\alpha$?

LÖSUNG:

(a) Der Weg ist völlig analog zum Lösungsweg in Aufgabe G3.

(b) A ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung in Richtung $(0, 2, 1)^T$. B_α ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ebene durch den Ursprung, die von den Vektoren $(2, 2, 0)^T$ und $(-2, 2, \alpha)$ aufgespannt wird.

(c) Weil B_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ein linearer Teilraum ist, gilt $A \subseteq B_\alpha$ genau dann, wenn $(0, 2, 1)^T \in B_\alpha$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das inhomogone lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2\lambda & - & 2\mu & = & 0 \\ 2\lambda & + & 2\mu & = & 2 \\ & & \alpha\,\mu & = & 1 \end{array}$$

eine Lösung besitzt. Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\begin{array}{rr|l} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{array}$$

stellt man fest, dass dieses System genau für $\alpha = 2$ eine Lösung besitzt.

(A 2) (10 Punkte)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Löse das lineare folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & - & \alpha\, x_3 & = & 1 - \alpha \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2\,\alpha\, x_3 & = & 2 - 2\alpha\,. \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösunsmenge. Welches geometrische Objekt wird durch V_α gebildet?

(b) Berechne die Schnittmenge von V_α mit der x-y-Ebene $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$.

(c) Zeige, dass die Menge der Schnittpunkte

$$V := \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} V_\alpha \cap E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x \in V_\alpha \cap E\}$$

ein linearer Teilraum ist.

LÖSUNG:

(a) Um das Gleichungssystem zu lösen führen wir den Gauß-Jordan-Algorithmus durch:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\alpha & 1-\alpha \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2\alpha & 2-2\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1-\alpha \\ 1 & 1 & -2\alpha & 2-2\alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 2 & -2\alpha & 2-2\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 1-\alpha \end{array}$$

Für $x_3 = \lambda$ ergibt sich also $x_2 = 1-\alpha+\alpha\lambda$ und $x_1 = x_2 = 1-\alpha+\alpha\lambda$. Die Lösungsmenge ist deshalb durch

$$V_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Dies ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $(1-\alpha, 1-\alpha, 0)^T$ mit Richtungsvektor $(\alpha, \alpha, 1)^T$.

(b) Die Schnittmenge von V_α mit der Ebene E sind alle Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, die zu dem obigen Gleichungssystem noch $x_3 = 0$ erfüllen. Wir fügen diese Gleichung dem System hinzu und lösen es erneut. Hierfür können wir die Rechnungen aus Teil (a) verwenden und erhalten als Lösungsmenge genau einen Punkt x mit $x_3 = 0$, $x_2 = 1-\alpha$ und $x_1 = 1-\alpha$, d.h.

$$E \cap V_\alpha = \{(1-\alpha, 1-\alpha, 0)^T\}$$

(c) Für die Menge aller Schnittpunkte gilt nach Teil (b)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \overset{[\alpha'=\alpha+1]}{=} \left\{ \alpha' \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha' \in \mathbb{R} \right\}$$

(A 3) (10 Punkte)

Wir betrachten die drei Punkte $p_1 = (0,1,1)$, $p_2 = (1,2,1)$ und $p_3 = (1,0,2)$ im $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen mit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene, welche die Punkte p_1, p_2 und p_3 enthält.

(a) Ist die Ebene E ein linearer Teilraum?

(b) Wir betrachten die folgende Gerade im $\mathbb{R}^3$:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimme die Schnittmenge der Geraden g mit der Ebene E.

LÖSUNG:

(a) Die Ebene E hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} E &= \{p_1 + \lambda(p_2 - p_1) + \mu(p_3 - p_1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} . \end{aligned}$$

Eine Ebene ist stets ein affiner Teilraum. E ist deshalb genau dann ein linearer Teilraum, wenn $0 \in E$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & = & -1 \\ & & \mu & = & -1 \end{array}$$

Man sieht sofort, dass dieses System keine Lösung besitzt. Also ist E kein linearer Teilraum.

(b) Die Schnittmenge $g \cap E$ besteht genau aus den Punkten $x \in \mathbb{R}^3$, für welche es $\lambda, \mu, t \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\-1\end{smallmatrix}\right) = x = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right) .$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem in (t, λ, μ) mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} t & \lambda & \mu & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Wegen den letzten beiden Zeilen hat das System eine Lösung $(1 = \lambda + \mu = 0)$. Die Gerade g schneidet die Ebene E also nicht, d.h. die Schnittmenge ist leer $g \cap E = \emptyset$.