Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08 31.01./01.02.08

Lineare Algebra I

14. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Orthonormalbasis von Polynomen

Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 4. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(t) \cdot q(t)\, dt$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ definiert wird. Bestimmen Sie die Länge der Vektoren der Monombasis $1, x, \ldots, x^5$ und die Skalarprodukte zwischen diesen Vektoren. Handelt es sich um eine Orthonormalbasis?

(G 2) Das orthogonale Komplement

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir sagen, ein Vektor $x \in V$ steht *senkrecht* auf $M \subseteq V$, falls $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in M$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $x \perp M$. Für eine weitere Teilmenge $N \subseteq V$ schreiben wir $N \perp M$ und sagen, dass N senkrecht auf M steht, falls jeder einzelne Vektor $x \in N$ senkrecht auf M steht. Das *orthogonale Komplement* der Menge M definieren wir durch:

$$M^\perp := \{\, x \in V \mid x \perp M \,\}\ .$$

Zeigen Sie, dass $M^\perp$ für jede Teilmenge $M \subseteq V$ ein linearer Teilraum von V ist und dass für alle $M, N \subseteq V$ gilt:

(a) $N \perp M \iff \operatorname{lin} N \perp \operatorname{lin} M$, (b) $M^\perp = (\operatorname{lin} M)^\perp$.

Hierbei bezeichnet $\operatorname{lin} M$ den linearen Teilraum, der von den Elementen von M aufgespannt wird. Wir können uns deshalb bei der Betrachtung orthogonaler Komplemente i.d.R. auf lineare Teilräume beschränken. Zeigen Sie, dass für jeden linearen Teilraum $U \subseteq V$ gilt:

(c) $U \cap U^\perp = \{\, 0 \,\}$, (d) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, (e) $U^\perp = \big((U^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Sei V endlich-dimensional und $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie durch Wahl geeigneter Orthonormalbasen, dass gilt

(f) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$. (g) $U = (U^\perp)^\perp$.

(h*) Finden Sie einen Vektorraum V und einen linearen Teilraum U mit $U \neq (U^\perp)^\perp$.

(G 3) Gram-Schmidt-Verfahren

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler, linearer Teilraum. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass der Teilraum U eine Orthonormalbasis besitzt. Wir wollen nun ein Verfahren, entwickeln, mit dem sich eine solche Orthonormalbasis bestimmen lässt. Das hier beschriebene Verfahren heißt *Gram-Schmidt-Verfahren*:

Wir wählen bzw. bestimmen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von U und setzen damit induktiv

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 \\ w_i &:= v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k \end{aligned}$$

für alle $2 \leq i \leq n$. Die so erhaltenen Vektoren normieren wir, indem wir $u_i := w_i / \|w_i\|$ für jedes $1 \leq i \leq n$ setzen. Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ tatsächlich eine Orthonormalbasis von U bilden. Gehen Sie hierzu in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ paarweise senkrecht aufeinander stehen, d.h. für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt $\langle w_i, w_j \rangle = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von U bilden. Folgern Sie, dass $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von U bilden.

(G 4)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und den Teilraum $U := \left\{ (1,1,1,1)^T \right\}^{\perp}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(G 5)

Betrachten Sie erneut Aufgabe G1. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des linearen Teilraumes $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ der Polynome vom Höchstgrad 3, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Monombasis $1, x, \ldots, x^3$ anwenden.