Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08 31.01./01.02.08

Lineare Algebra I

14. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Orthonormalbasis von Polynomen

Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 4. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle\, p, q\,\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)\cdot q(t)\; dt$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ definiert wird. Bestimmen Sie die Länge der Vektoren der Monombasis $1, x, \ldots, x^5$ und die Skalarprodukte zwischen diesen Vektoren. Handelt es sich um eine Orthonormalbasis?

LÖSUNG: Die Linearität in beiden Komponenten ergeben sich aus der Linearität des Integrals direkt durch Nachrechnen. Für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ nimmt die Funktion $f : t \mapsto p(t)^2$ keine negativen Werte an. Somit ist auch das Integral $\langle\, p, p\,\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)^2\; dt$ nicht-negativ.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $\langle\, p, p\,\rangle = 0$ auch $p = 0$ folgt. Sei hierzu $p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ ein Polynom mit $p \neq 0$. Dann nimmt die Funktion $f : t \mapsto p(t)^2$ keine negativen Werte an und ist außerdem nicht konstant Null. Es gibt damit ein Teilintervall $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ mit $a < b$, auf welchem f nur echt positive Werte annimmt (Stetigkeit). Auf diesem (kompakten) Intervall besitzt die Funktion ein Minimium $0 < m := \min_{t\in[a,b]} f(t)$. Für das Integral folgt dann

$$\langle\, p, p\,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\; dt \geq \int_{a}^{b} f(t)\; dt \geq \int_{a}^{b} m\; dt = m(b-a) > 0$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-1}^{1} t^{2n}\; dt = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{2n+1}\,, \qquad\qquad \int_{-1}^{1} t^{2n+1}\; dt = \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\Big|_{-1}^{1} = 0\,.$$

Mit $\langle\, x^n, x^m\,\rangle = \langle\, x^m, x^n\,\rangle = \int_{-1}^{1} t^{n+m}\; dt$ für alle $0 \leq n, m$ ergibt sich dann

$\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
1	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0
x		$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$
x^2			$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$	0
x^3				$\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{9}$
x^4					$\frac{2}{9}$	0
x^5						$\frac{2}{11}$

Als Länge der Monome ergibt sich

n	0	1	2	3	4	5
$\lVert x^n\rVert$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/5}$	$\sqrt{2/7}$	$\sqrt{2/9}$	$\sqrt{2/11}$

(G 2) Das orthogonale Komplement

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir sagen, ein Vektor $x \in V$ steht *senkrecht* auf $M \subseteq V$, falls $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in M$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $x \perp M$. Für eine weitere Teilmenge $N \subseteq V$ schreiben wir $N \perp M$ und sagen, dass N senkrecht auf M steht, falls jeder einzelne Vektor $x \in N$ senkrecht auf M steht. Das *orthogonale Komplement* der Menge M definieren wir durch:

$$M^\perp := \{ x \in V \mid x \perp M \} \ .$$

Zeigen Sie, dass $M^\perp$ für jede Teilmenge $M \subseteq V$ ein linearer Teilraum von V ist und dass für alle $M, N \subseteq V$ gilt:

(a) $N \perp M \iff \operatorname{lin} N \perp \operatorname{lin} M$, (b) $M^\perp = (\operatorname{lin} M)^\perp$.

Hierbei bezeichnet $\operatorname{lin} M$ den linearen Teilraum, der von den Elementen von M aufgespannt wird. Wir können uns deshalb bei der Betrachtung orthogonaler Komplemente i.d.R. auf lineare Teilräume beschränken. Zeigen Sie, dass für jeden linearen Teilraum $U \subseteq V$ gilt:

(c) $U \cap U^\perp = \{ 0 \}$, (d) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, (e) $U^\perp = \big((U^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Sei V endlich-dimensional und $U \subseteq V$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie durch Wahl geeigneter Orthonormalbasen, dass gilt

(f) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$. (g) $U = (U^\perp)^\perp$.

(h*) Finden Sie einen Vektorraum V und einen linearen Teilraum U mit $U \neq (U^\perp)^\perp$.

LÖSUNG: Nach den Definitionen gilt $N \perp M$ genau dann wenn $\langle x, y \rangle = 0$ für alle Vektoren $x \in N, y \in M$ gilt.

(a) Es gelte $N \perp M$. Sei $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ eine Linearekombination von Vektoren $x_i \in N$ und $y = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$ eine Linearkombination von Vektoren $y_i \in M$. Dann gilt

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \underbrace{\langle x_i, y_i \rangle}_{=0} = 0 \ .$$

Somit folgt $\operatorname{lin} N \perp \operatorname{lin} M$.

Es gelte $\operatorname{lin} N \perp \operatorname{lin} M$. Dann gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $x \in \operatorname{lin} N, y \in \operatorname{lin} M$. Insbesondere also für die Vektoren $x \in N \subseteq \operatorname{lin} N$ und $y \in M \subseteq \operatorname{lin} M$, d.h. es gilt $N \perp M$.

(b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil gilt

$$M^\perp = \{ x \in V \mid x \perp M \} = \{ x \in V \mid x \perp \operatorname{lin} M \} = (\operatorname{lin} M)^\perp$$

(c) Sei $x \in U \cap U^\perp$. Dann gilt $x \perp U$ und somit $\langle x, x \rangle = 0$, woraus $x = 0$ folgt.

(d) Sei $x \in U$. Dann gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für jedes $y \in U^\perp$ und somit $x \in (U^\perp)^\perp$.

(e) Nach dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir bereits, dass $U^\perp \subseteq \big((U^\perp)^\perp\big)^\perp$ gilt. Wir müssen also nur die umgekehrte Inklusion zeigen: Sei $x \in \big((U^\perp)^\perp\big)^\perp$. Dann gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle Vektoren $y \in (U^\perp)^\perp$. Insbesondere gilt für Vektoren $y \in U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Daraus ergibt sich dann $x \in U^\perp$.

(f) Wir wählen eine Orthonormalbasis $u_1, \dots, u_k$ von U und betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{R}^k, \quad \phi(v) := (\langle v, u_1 \rangle, \langle v, u_2 \rangle, \dots, \langle v, u_k \rangle)^T$$

und wollen die Dimensionsformel für Bild und Kern anwenden. Das Bild $\phi(u_i)$ ist dann gerade der i-te kanonische Einheitsvektor in $\mathbb{R}^k$. Somit ist die Abbildung surjektiv. Weiter gilt

$$\ker \phi = \{ v \in V \mid \forall 1 \leq i \leq k. \quad \langle v, u_i \rangle = 0 \} = \{ u_1, \dots, u_k \}^\perp = U^\perp .$$

Aus der Dimensionsformel folgt also

$$\dim V = \dim(\operatorname{im} \phi) + \dim(\ker \phi) = \dim \mathbb{R}^k + \dim U^\perp = \dim U + \dim U^\perp$$

(g) Wir wissen bereits, dass $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ gilt. Nach dem vorherigen Aufgabenteil gilt weiter

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U .$$

Somit muss $U = (U^\perp)^\perp$ gelten.

(G 3) Gram-Schmidt-Verfahren

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler, linearer Teilraum. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass der Teilraum U eine Orthonormalbasis besitzt. Wir wollen nun ein Verfahren, entwickeln, mit dem sich eine solche Orthonormalbasis bestimmen lässt. Das hier beschriebene Verfahren heißt *Gram-Schmidt-Verfahren*:

Wir wählen bzw. bestimmen eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von U und setzen damit induktiv

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 \\ w_i &:= v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k \end{aligned}$$

für alle $2 \leq i \leq n$. Die so erhaltenen Vektoren normieren wir, indem wir $u_i := w_i / \|w_i\|$ für jedes $1 \leq i \leq n$ setzen. Zeigen Sie, dass die Vektoren $u_1, \dots, u_n$ tatsächlich eine Orthonormalbasis von U bilden. Gehen Sie hierzu in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Vektoren $w_1, \dots, w_n$ paarweise senkrecht aufeinander stehen, d.h. für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt $\langle w_i, w_j \rangle = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $w_1, \dots, w_n$ eine Basis von U bilden. Folgern Sie, dass $u_1, \dots, u_n$ eine Orthonormalbasis von U bilden.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen durch Induktion über j, dass $\langle w_j, w_i \rangle = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Der Induktionsanfang $j = 2$ (also $i = 1$) ergibt sich durch

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, w_1 \right\rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \langle w_1, w_1 \rangle = 0 .$$

Im Induktionsschritt ergibt sich für $1 \leq i < j + 1$

$$\langle w_{j+1}, w_i \rangle = \left\langle v_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v_{j+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k, w_i \right\rangle = \langle v_{j+1}, w_i \rangle - \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v_{j+1}, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} \langle w_k, w_i \rangle$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $0 = \langle w_k, w_i \rangle$ für alle $k < i$ und auch $0 = \langle w_k, w_i \rangle$ für alle $i < k \leq j$. In der Summe verschwindet also nur einer der Summanden nicht:

$$\langle w_{j+1}, w_i \rangle = \langle v_{j+1}, w_i \rangle - \frac{\langle v_{j+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle = 0 .$$

(b) Mittels vollständiger Induktion macht man sich leicht klar, dass jeder Vektor w_i eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_i$ ist. Insbesondere liegen $w_1, \ldots, w_n$ in dem Teilraum U. Weiter gilt

$$v_i = w_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k ,$$

d.h. die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ lassen sich als Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ darstellen. Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ erzeugen somit den Teilraum U. (Daraus folgt bereits, dass $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind.)

Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ ergeben sich aus $w_1, \ldots, w_n$ lediglich durch Skalierung. Somit bildet auch $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von paarweise orthogonalen Vektoren. Weil $w_1, \ldots, w_n$ senkrecht aufeinander stehen, tun dies auch die normierten (skallierten) Vektoren $u_1, \ldots, u_n$. Darüber hinaus gilt $\|u_i\| = 1$. Somit ist $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis.

(G 4)

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und den Teilraum $U := \left\{ (1,1,1,1)^T \right\}^{\perp}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Lösung: Vorbemerkung: Die Orthonormalbasis aus dem Gram-Schmidt-Verfahrens hängt von der anfangs gewählten Basis ab. Wählt man zum Beispiel die Ausgangsbasis $v_1, \ldots, v_n$ bereits als Orthonormalbasis, so erhält man als Ergebnis gerade wieder die Basis $v_1, \ldots, v_n$.

Eine Basis von U lässt sich zum Beispiel durch Lösen des linearen Gleichungssystem $\left\langle x, (1,1,1,1)^T \right\rangle = 0$ ermitteln. Alternativ wissen wir aus den Aufgaben zum orthognalen Komplement, dass U die Dimension 3 hat. Wir können deshalb auch drei linear unabhängige Vektoren in U raten. So sieht man z.B. sehr schnell, dass $v_1 := (1,-1,0,0)^T$, $v_2 := (0,1,-1,0)^T$ und $v_3 := (0,0,1,-1)^T$ eine Basis von U bilden.

Durch etwas geschickteres Raten stellt man fest, dass auch die Vektoren

$$w_1 := (1,0,0,-1)^T , \qquad w_2 := (0,1,-1,0)^T , \qquad w_3 := (1,-1,-1,1)^T$$

eine Basis von U bilden, sogar eine Orthogonalbasis. Durch Normierung erhalten wir eine Orthonormalbasis

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,0,-1)^T , \qquad u_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(0,1,-1,0)^T , \qquad u_3 = \tfrac{1}{2}(1,-1-1,1)^T .$$

Entsprechend der Bemerkung sind wir an dieser Stelle bereits fertig.

(G 5)

Betrachten Sie erneut Aufgabe G1. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des linearen Teilraumes $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ der Polynome vom Höchstgrad 3, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Monombasis $1, x, \ldots, x^3$ anwenden.

Lösung: Wir verwenden die in Aufgabe G1 berechneten Skalarprodukte.
1. Schritt:

$$w_1 = 1 \qquad\qquad \langle w_1, w_1 \rangle = 2$$

2. Schritt:

$$w_2 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot 1 = x \qquad\qquad \langle w_2, w_2 \rangle = \tfrac{2}{3}$$

3. Schritt:

$$w_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot x = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$
$$\langle w_3, w_3 \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle - 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \langle x^2, 1 \rangle + (\tfrac{1}{3})^2 \langle 1, 1 \rangle = \tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{8}{45}$$

4. Schritt:

$$
\begin{aligned}
w_4 &= x^3 - \frac{\langle\, x^3, 1 \,\rangle}{\langle\, w_1, w_1 \,\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle\, x^3, x \,\rangle}{\langle\, w_2, w_2 \,\rangle} \cdot x - \frac{\langle\, x^3, x^2 \,\rangle - \frac{1}{3}\langle\, x^3, 1 \,\rangle}{\langle\, w_3, w_3 \,\rangle}(x^2 - \tfrac{1}{3}) \\
&= x^3 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} \cdot x = x^3 - \tfrac{3}{5}x \\
\langle\, w_4, w_4 \,\rangle &= \langle\, x^3, x^3 \,\rangle - 2 \cdot \tfrac{3}{5}\langle\, x^3, x \,\rangle + (\tfrac{3}{5})^2 \langle\, x, x \,\rangle = \tfrac{2}{7} - \tfrac{12}{25} + \tfrac{6}{25} = \tfrac{8}{175}
\end{aligned}
$$

Als Orthogonalbasis erhalten wir somit die Polynome $u_i = w_i / \sqrt{\langle\, w_i, w_i \,\rangle}$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\
u_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{6}\, x \\
u_3 &= \tfrac{3}{4}\sqrt{10}(x^2 - \tfrac{1}{3}) \\
u_4 &= \tfrac{5}{4}\sqrt{14}(x^3 - \tfrac{3}{5}x)
\end{aligned}
$$