Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Kay Schwieger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008

Lineare Algebra I

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Beweisen Sie, dass die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

(b) Berechnen Sie A^{13}.

(G 2)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sei durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + yz \end{pmatrix}.$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie, dass f nicht diagonalisierbar ist.

(b) Berechnen Sie eine Basis des $\mathbb{C}^3$, in der f Trigonalgestalt hat.

(G 3)

Eine lineare Selbstabbildung $L : V \to V$ eines Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$ heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $L^n = 0$ existiert. Es sei $L : V \to V$ eine solche nilpotente Abbildung. Beweisen Sie

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von L so gilt $\lambda = 0$.

(b) Es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(c) Es gibt eine Basis von V bezüglich derer L durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dargestell wird, wobei A' nilpotent ist.

(G 4)

Beweisen Sie, daß jede nilpotente Matrix trigonalisierbar ist.

(G 5) Sesquilinearformaen

Eine *Sesquilinearform* auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle -,-\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, welche antilinear in der ersten und linear in der zweiten Komponente ist. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\langle -,-\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ mit $\mathbf{x}^H = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ ist. (Der Vektor $\mathbf{x}$ ist hier ein Spaltenvektor.)

(G 6) Skalarprodukte

Ein *Skalarprodukt* auf einem rellen Vektorraum V ist eine positiv definite bilineare Abbildung $\langle -,-\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Der Winkel α zwischen zwei nichttrivialen Vektoren v und w ist dann durch die Gleichung $\langle v, w\rangle = \sqrt{\langle v, v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w\rangle} \cos\alpha$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\langle -,-\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist. (Der Vektor $\mathbf{x}$ ist hier ein Spaltenvektor.)

(b) Berechen Sie den Winkel zwischen $(1,0)^T$ und $(1,1)^T$.

(G 7) Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

Hausübungen

(H 1)

Bearbeiten Sie alle Aufgaben, welche Sie bis jetzt ausgelassen haben.